

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો.

જુહાપીર

ચિત્રેશ્વર નંદા ગણધર્મ

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

[ગુજરાતી કૉપીરાઈટ વિભાગ]

અનુક્રમાંક ૧૨૭૦૮- ગ્રંથાલય

પુસ્તકનું નામ ૦૫૦૦ પ્રમિતિ - ૧

વિષય ૭૨ : ૬૪૫ : ૩૬

No.

Received on 15-12-25

Abbas Ali

Huzur Deputy Collector,
Surat.

Department of Public Instruction, Bombay

NEW GEOMETRY

PART 1.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,

First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B. A.,

Teacher, Training College for men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B. A., S. T. C.,

H. M., P. R. Training College, Ahmedabad.

6TH EDITION.

15,000 COPIES.

PUBLISHED BY

Karsandas Narandas & Sons,

BOOKSELLERS & PUBLISHERS, SURAT.

All rights reserved.

1925.

PRINTED BY
VAJERAM MANSING AT THE "SURAT CITY" PRINTING PRESS,
NEAR CHOUTA BRIDGE, SURAT.

AND

PUBLISHED BY
BALUBHAI KARSANDAS
OF MESSRS. KARSANDAS NARANDAS & SONS,
BOOK-SELLERS & PUBLISHERS, NANAVAT, SURAT.

મુંબઈ ઇલાકાનું સરકારી કેળવણી ખાતું.

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો

મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એલ.,

ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,

અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,

શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફાર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજ સપ્તે, બી. એ., એસ. ટી. સી.,

અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી.એ., એસ.ટી.સી.,

હે. મા. પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ છઠી

પ્રત-૧૫,૦૦૦.

સને ૧૯૨૫.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

કરસનદાસ નારણદાસ એન્ડ સન્સ,

નાણાવટ, મુરત.

સરકારે સર્વ હક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

સુરત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
સંપાદક
ગુજરાતી કૉપીરાઈટ-સંગ્રહ

સુરત ચૌદાના પૂત્ર ઉપર આવેલા “ સુરત સિદ્ધિ ” પ્રિન્ટિંગ
પ્રેસમાં વજીરામ માનસિંહે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.

ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં ‘નવી ભૂમિતિ’* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી અંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક અંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડ્ફ્રે અને સિડ્નસ, બર્નાડ અને ગ્રાઇડ, પિયરપોઇટ, એગર, વગેરે અંથકારોના અંગ્રેજી અંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ધણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. આ માટે આ સર્વે અંથકારોના પ્રસ્તુત અંથકાર ધણા આભારી છે.

અંથકર્તા.

*નવી ભૂમિતિ—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિત-શાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ધણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પરદાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.

જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્ધાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહિતી ધ્યાન દઈને વાંચવી, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે મપાવીને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવરાવવાની જરૂર છે; તેથી ૯ થી ૧૧૫ સુધીનાં પાનાંમાંના પ્રાયોગિક ભાગ કાળજીપૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય, તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો બરાબર સમજવા માટે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર બરાબર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કઢાવવી. આકૃતિ બરાબર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડીમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કઢાવવી. વ્યાખ્યા

છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાનાં હોય છે, તેમની સત્યતા જોકે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખવતી વખતેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સત્યતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી ફરી કરાવવો, અને તેનો અનુભવ કરાવ્યા પછી “ હવે એજ વાત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ ” એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.

અનુક્રમણિકા.

	પૃષ્ઠ.
હિપોદ્ધાત...	૧-૮
૧લો (પ્રાયોગિક ભાગ)...	૯-૧૧૬
પ્રકરણ ૧લું.	
૧ લીટીઓ માપવા વિષે ...	૧૦
૨ સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ ...	૧૬
૩ ખુણો ...	૨૧
૪ સાપેક્ષ દિશા ...	૪૨
૫ અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે ...	૪૪
૬ એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા ...	૪૬
૭ એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા....	૫૦
૮ સમાંતર લીટીઓ. ...	૫૨
૯ ત્રિકોણ. ...	૬૩
૧૦ લંબ....	૮૯
૧૧ સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણ ...	૯૨
પ્રકરણ ૨જું.	
ભૂમિતિ એટલે શું ? ...	૧૦૦
પદાર્થ ...	૧૦૧
લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ ...	૧૦૨
પૃષ્ઠ ...	૧૦૨
સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ ...	૧૦૫
સપાટી ...	૧૦૬
લીટી ...	૧૦૮
બિંદુ ...	૧૧૪
ખંડ રજો (પ્રમેય ૧-૨૫) ...	૧૧૭-૧૭૫
ખંડ રજો (કૃત્ય ૧-૧૩) ...	૧૭૭-૧૯૭
પરિશિષ્ટ અ (પરચુરણ પ્રશ્ન) ...	૧૯૭-૨૦૮
પરિશિષ્ટ બ (પ્રશ્ન છોડવાની પૃથક્કરણ પદ્ધતિ)...	૨૦૯-૨૧૫
પ્રશ્નોના ઉત્તરો ...	૨૧૬

પૃષ્ઠ	લીટી	શુદ્ધિપત્ર	શુદ્ધ
૪૭		અશુદ્ધ	અ—ક
૫૫		આકૃતિ ૨	અ—ક
		અ—	અ—ક
		આકૃતિ	અ—ક
		અ—	અ—ક
૧૪૭	૨	અક ॥ વક	અક=વક
૧૫૩		આકૃતિ ૧	અક=વક
-		વ—ક	વ—ઈ—ક
૧૭૩	૭	દુભગાય	દુભગાય
૧૮૪	જેક્ષી	દુભગવા	દુભગવો.

ઉપોદ્ધાત.

નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય-સિદ્ધાંત) અતુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવી છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય-સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમો) વિગમનપદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતો પરથી સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતોનો ક્રમ યુક્તિહીન સહેજ જુદો છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્તિહીનમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હોય એવા સિદ્ધાંતો કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિઓ બરાબર દોરવી ઘણી અવશ્યની ગણી છે.

આ ફેરફાર કરવાનાં કારણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) ફોટો શી રીતે લેવો તેની માહિતી આપણને કોઈ મોઢેથી આપે, તો તે બરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થોડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. જો તેજ માહિતી આપણને પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ વડે કોઈએ આપી હોય, તો તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે ઝોછામાં ઝોછા એક અડવાડીઆ સુધી તો ભુલાશે નહિ; પણ તેજ પ્રયોગ આપણે પોતાને હાથે કરીએ, તો તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સમજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આસરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કોઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે જાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવો તફાવત પડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ લાગુ પડે છે. આ ઉપરથી એવો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે, કે કોઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી થાય છે,

અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પોતાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાકું થાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રયોગ વિદ્યાર્થીએ જાતે કરવા અવશ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યાનદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણોજ કઠણ ગણાતો હતો એ વાત ખાતરીપૂર્વકજ સિદ્ધ કરી આપે છે, કે આ વિષય શીખવવાની જુની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને કઠણ હતી. ‘કાટખુણો,’ ‘સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ,’ વગેરે સંજ્ઞામાં અથવા ‘ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના ‘પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો’ એમ કહ્યું હોત, તો (યુક્તિજ્ઞના ૧૬૫ પુસ્તકના ૩૨ સિદ્ધાંત જેમને ચાલ્યા છે એવા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી) કેટલા થોડા વિદ્યાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જુની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું આકૃતિના ધર્મોનું જ્ઞાન ધણુંજ અધુરું રહેતું અને ઘણાખરો વિષય તેમને ગોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કરાવવા એજ એક ઉપાય છે સમાંતર લીટીઓને છેદતી લીટીથી થતા ગ્યુટકમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત યુક્તિજ્ઞના ૨૯મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કહ્યા પછી જોટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિદ્યાર્થીઓ પોતાને હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જુએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિદ્યાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ

બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ જો બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે:—પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોનો સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન કર્યા પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની બુદ્ધિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર રહે છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતાં સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય, તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી ચતાં અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજા સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું બરાબરું

નક્કી કરવાની રીત પણુ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈપણુ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે: એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમના આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ ગુદાં ગુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અજ્ઞાનને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખતે ખોટો પડે છે. પરંતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈએ તેટલાં ગુદાં ગુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો કરવાનો સંભવ ઘણો થોડો હોય છે. માટે ખરા સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહિતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણુ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણુ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈ કોઈ વખતે તો મળતાં પણુ નથી, અને કોઈ કોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણુ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે

ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદૃશ્ય વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણસ કેવાં લક્ષણવાળો હશે, ક્યારે જઈએ તો અમુક માણસ નક્કી ઘેર મળશે,.....વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણ માહિતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે યુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે બાબતોમાં યુક્લિડથી જુદાપણું:—

અસાધારણ બુદ્ધિવાળા કોઈ પણ પુરુષે કરેલું કામ સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણસે કરેલું કામ ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર, શેક્સ્પિયર, કાળિદાસ, એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટોટલ, ડાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ, ઇત્યાદિ પંડિતોના તાર્કિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો કે અદ્વિતીય છે, તોપણ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્લિડની ભૂમિતિમાં પણ છે. તોપણ યુક્લિડમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્લિડની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક બુદ્ધિમાન ઇંગ્લેન્ડે એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર કર્યો હોય, તોપણ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ધણો ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેવીજ સ્થિતિ યુક્લિડની ભૂમિતિની છે. યુક્લિડે સિદ્ધાંતોનો જ ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે સારો છે, તોપણ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવાનો જરૂરનો જણાયો છે,

દાખલા તરીકે-યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકમાંના ૨ અને ૩ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે. ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫, એ સિદ્ધાંતો સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી તે પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડભરેલું છે. તેમજ યુક્લિડના પહેલા પુસ્તકમાંનો ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો ૧૩મો સિદ્ધાંત, એમની જે સિદ્ધતા યુક્લિડે આપી છે, તેના કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપવી બની શકે એમ છે.....વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્લિડની ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ જોઈ શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ, માપવાની પટ્ટી, વગેરેની મદદથી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે.

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જે આ વિષયમાં ‘સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,’ ‘આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,’ ‘આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,’ વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમબાજુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ, વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો ‘સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,’ ‘લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે,’ ‘ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે,’ ‘સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજીને દુભાગે છે,’ એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જે આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના બરાબર વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—‘એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખા હોય છે,’ આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે

ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તો તે ખુણાની સામેની બાજુએ નાની મોટી આવશે; અને તેમનું નાનામોટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખા કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે.

આકૃતિઓ બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટ્ટી, વગેરે સાધનોની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનોનો ઉપયોગ કરવો, એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્તિવ્રતમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનોથી આકૃતિઓ કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિઓ દોરી છે, એમ ધારી લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હતો. નવી ભૂમિતિમાં તો એવી છૂટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં બીજાં (ગૌણ) લક્ષણો નીચે મુજબ છે:—

(૧) કોઈ પણ વિધાનના આધાર માટે ‘ફલાણો સિદ્ધાંત’ એમ કહી સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીઓ સિદ્ધાંતોના ક્રમાંક ગોખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેઓ જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે ક્યાં કારણોનો આધાર છે તેનું તેઓને જ્ઞાન હોતું નથી. ‘જ્ઞ ખુણો = જ્ઞ ખુણો,—આધાર રહ્યો સિદ્ધાંત’—એવું એક વખતે ગોખી રાખ્યું હોય, તો એક ખુણો બીજા ખુણા બરાબર છે એમ કહેવા માટે ક્યાં કારણોની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને જે વ્યુત્ક્રમ ખુણા ખરૂં જોતાં બરાબર ન હોય તોપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે રહ્યો સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છોકરાના મોઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છોકરાઓ પાસે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તોપણ આધાર હંમેશાં એવી

રીતે આપવોજ જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછી વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ. એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છૂટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકજ આપ્યા છે; પણ જગાનો બચાવ કરવા માટેજ એમ કયું છે. તેનું અનુકરણ શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ:—

અ ખુણો બ ખુણા બરાબર છે; અથવા સ્વયં મોટો છે, એમ લખવાને બદલે $\angle a = \angle b$, અથવા $\angle a > \angle b$, એમ લખવું સહેલું અને તે વધારે બ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સંમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે ‘પ્રત્યક્ષ’ અને ‘સહેજ સમજાય એવી’ હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.

સૂચના—ભૂમિતિના વિષયની માહિતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના ૧૯૫ ખંડમાંની માહિતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કહ્યા પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનો.

માપ લેવાની પટ્ટી.—જેના પર ઇંચ અને ડેસિમીટર, તથા તે બંનેના અંશ અથવા ભાગ બતાવેલા હોય એવી પટ્ટી. [જે પટ્ટીના એકજ પૃષ્ઠની બંને કોરો ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ બતાવ્યા હોય એવી પટ્ટી વધારે સારી.]

સેટ્ સ્કવેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦° , ૬૦° , અને ૩૦° ના હોય, અને જેનો કર્ણ (સૌથી લાંબી બાજુ) આસરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦° , ૪૫° , અને ૪૫° ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ આશે.]

વિભાજક (જેનાં બંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને કંપાસ (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ ખોસાય છે તે)—[જેમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીઈ બેસાડી શકાય એવો કંપાસ હોય તો જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ પેન્સિલ.—૨ એચ કે ૩ એચની પેન્સિલ હોય તે વધારે સારું. બની શકે તો ૩ એચની પેન્સિલનો ઉપયોગ કરવો.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પાલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સોયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કોણુમાપક.—(પ્રોટ્રેક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપક કરતાં ચતુષ્કોણુ કોણુમાપક વધારે સારો ખરો; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપકનો ઉપયોગ કરવો સહેલો પડે છે, માટે તેનોજ ઉપયોગ કરવો.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનો કાગળ, ચોરસ આંકેલી એક્સસાઈઝ બુકો,* દોરો, ટાંકણી, વગેરે.

[પ્રયોગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થીઓએ એક જુદીજ નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવાં.]

લીટીઓ માપવા વિષે.

લીટીઓ માપવા માટે પટ્ટી અને વિભાજક વપરાય છે.

માપ લેવાની પટ્ટી (અથવા ફુટપટ્ટી અને મીટરપટ્ટી)—આ પટ્ટી પર એક કોરે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કોરે મીટરના‡

* ભૂમિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

‡ મીટર—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હોવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નડે છે. લોકોને આજ ધણું વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરંતુ આ કામ માટે ફેન્ચ સિવાય બીજા કોઈ લોકો આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આસરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુનાં વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ ચોજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કોઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક યામ્યોત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈનું

ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક મીટર એટલે આસરે ૩૬-૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિમીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર, એવા ભાગ છે. પટ્ટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ટક.

(મિલિમીટર = $\frac{1}{1000}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર = ૧ સેન્ટિમીટર ($\frac{1}{100}$ મીટર)

૧૦ સેન્ટિમીટર = ૧ ડેસિમીટર ($=\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ ડેસિમીટર = ૧ મીટર

૧૦ મીટર = ૧ ડેકામીટર (=૧૦ મીટર)

૧૦ ડેકામીટર = ૧ હેક્ટોમીટર (=૧૦૦ મીટર)

૧૦ હેક્ટોમીટર = ૧ કિલોમીટર (=૧૦૦૦ મીટર)

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો ખીલકુલ ઉપયોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટ્ટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીટરના ભાગ છોકરાઓ ખરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

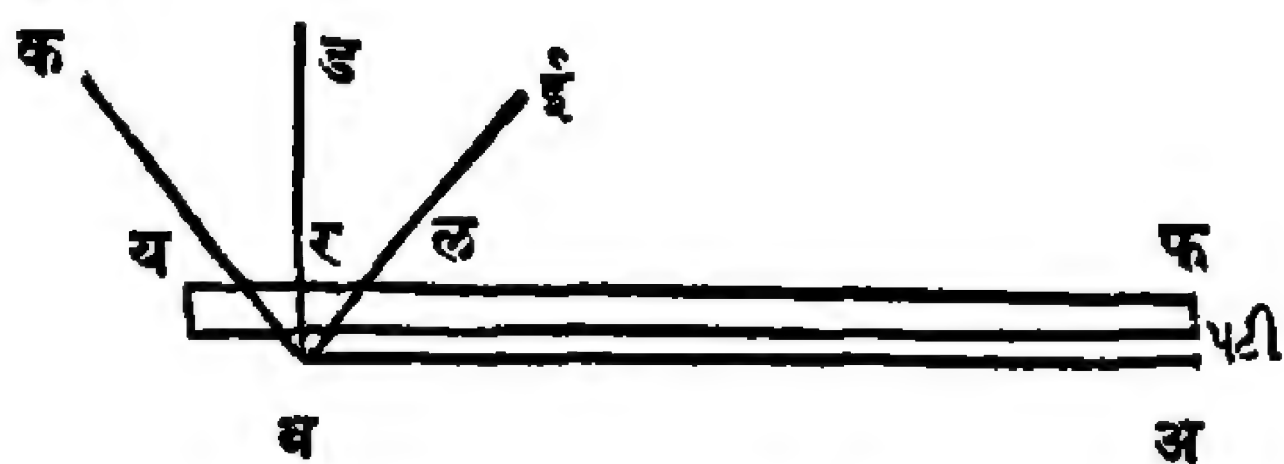
લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીત:—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા

મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા ચામ્યોત્તરવૃત્તનો $\frac{1}{10000000}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યા છે. દાખલા તરીકે—આર અથવા ૧૦૦ ચોરસ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે; એક ધન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯.૨ ફેરેન્હાઈટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે ગ્રામ, તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને લિટર અથવા એક ધન ડેસિમીટર એ અનાજ વગેરેના ભરતલના માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

માટે વિમાનકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત નીચે પ્રમાણે છે:—જે અંતર માપવું હોય, તે કરતાં જરા વધારે અંતર વિમાનકની અણીઓ વચ્ચે રહે એમ વિમાનક ઉઘાડવો; પછી હળવે રહી દબાવીને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર ઓછું કરતાં કરતાં જે અણી આપેલી લીટીનાં જે છોડા પર જરાજર આવે એમ કરવું; પછી વિમાનકની અણીઓ પટ્ટી પર મૂકી પટ્ટી પરનું અંતર ગણવું. (વિમાનકનાં પાંખાં પટ્ટી પર ઉભાં ન રાખતાં ત્રાંસાં કે આડાં રાખવાં; એમ કરવાથી વિમાનકની અણી પટ્ટીને વાગવાથી પટ્ટીને કાણું પડવાની ખીક રહેશે નહિ.)

આસ ચોક્કસાઈની જરૂર ન હોય ત્યારે લીટી માપવા માટે ફક્ત પટ્ટીનો ઉપયોગ કરવો. પટ્ટીથી લીટી માપવી હોય તો તે કામ માટે લંબાઈની બંને બાજુએ ઢાળ પડતી હોય એવી પટ્ટી સારી પડશે.

પટ્ટી બંને બાજુએ ઢાળ પડતી ન હોય, તો પટ્ટી લીટી પર મૂક્યા પછી, લીટીનો છેડો પટ્ટી પરનાં કંઈ નિશાનીની નીચે આવે છે તે જોવા માટે લીટીના છેડાની ઉપલી બાજુએ લંબમાં આંખ મૂકીને જોવું. લંબમાં ન જોતાં વાંકું જોયું હોય તો લીટીનો છેડો ખરેખર જે કાપા નીચે હોય છે તેનાથી કોઈ જુદાજ કાપા નીચે દેખાય છે. એમ કેમ બને છે તે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી જણાઈ આવશે.



(પટ્ટીની ઉપલી આકૃતિમાં ઉભી લીટી પટ્ટીની જગાઈ દર્શાવે છે. એ ધ્યાનમાં રાખવું.

ધારો કે અવ લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ
ઘડ લંબના ઢ ખિંદુ પાસે હશે, તો ઘ છેડો ર ખિંદુની નીચે દેખાશે,
અને અવ લીટીની લંબાઈ ફર જેટલી લાગશે; જો આંખ ફ સ્થાનમાં
હશે, તો અવ લીટીની લંબાઈ ફલ જેટલી લાગશે; આંખ ક સ્થાને
હશે, તો અવની લંબાઈ ફય જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. અવ લીટીની લંબાઈ ઇય અને મિલિમીટરમાં માપો.

અ ————— બ

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇય અને મિલિ-
મીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર
આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩.૯ ઇંચ
રાખો, અને તે અણીઓ પટ્ટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને
તેમાં કેટલાં સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટ્ટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની
લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

૫. અક, કઢ, ઢવની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો
કરો. પછી અવની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ બરાબર છે કે
કેમ તે જુઓ.

અ ————— ક ————— બ

• ૬. અક, કઢ, ઢવની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો
સરવાળો કરો. પછી અવની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર
છે કે નહિ તે જુઓ.

* લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં
માપવામાં આવે છે.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને ઉપલા $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ પ્રશ્નના જવાબ કાઢો.

૭. અથ લીટીની લંબાઈ માપો. અકની લંબાઈ માપીને તે અથમાંથી બાદ કરો, એટલે કથની લંબાઈ નીકળશે. કથની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંનો જવાબ ખરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
અ ક થ

૮. ૨.૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમનો સરવાળો કરો, અને તે ૨.૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો બૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. અથ લીટી ૪.૫" * લો. તેમાં અક=૧.૨", કથ=૨.૬" લઈને કથની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો બૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬.૬"ની લીટી લો. તેના ૧ : ૫ના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧-૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તો પણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (પુ.)×

૧૨. ૩.૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

* "આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧.૨" એટલે ૧.૨ ઇંચ.

× પુ. = પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત ખરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

૧૩. ૩૩ મિ. મી. + લીટી લઈને તેનો ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા બે ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢો. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. અવના અટકળથી સરખા બે ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (૫૦)

૧૫. અવના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. અવના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

(જવાબ સાધારણ રીતે બરાબર આવે ત્યાંસુધી વિદ્યાર્થીએ ઉપર પ્રમાણે લીટીઓની લંબાઈ અટકળથી માપવાનો મહાવરો કરવો.)

લીટીઓ દુભામવા વિષે.

આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ કરવાની સ્થૂળ રીત:-

વિભાજકની અણીઓ આપેલી લીટીની અર્ધી લંબાઈ જેટલે અંતરે આસરે રાખવી. લીટીને વિભાજક લગાડીને આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ પડે છે કે કેમ તે જોવું. પડતા હોય તો ઠીકજ છે; પરંતુ પડતા ન હોય તો જે તફાવત પડે તેનો અર્ધો ભાગ વિભાજકની અણીઓની વચ્ચેના અંતરમાં જરૂર જણાય તેમ વતો કે ઓછો કરવો.

દાખલા તરીકે:-અવ લીટીના બે સરખા ભાગ કરવા છે. તેના આસરે અર્ધો ભાગ જેટલે અંતરે વિભાજકની બે અણીઓ રહે એટલો વિભાજક પહોળો કરો, અને તે અવ લીટી પર મૂકો. ધારો કે તે બે અણીઓ અ અને ગ પર પડે છે. એમજ બીજી વાર વિભાજકને ગ બિંદુથી શરૂ કરીને મૂકો એટલે બીજી અણી ક પર પડશે.

આ બે ભાગ મળીને આપેલી લીટીથી ઓછા થાય છે, માટે બાકી રહેલા (કચ અક્ષરથી દેખા-

ડેલા) અંતરના અર્ધ જેટલી
(કચ જેટલી) વિભાજકની

અ ગ હ ક ડ બ

અણીઓ વચ્ચે પહેળી કરવી. એટલે પહેલાં વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે કચ જેટલું અંતર હતું તે અંતર હવે ગચ જેટલું થશે. હવે વિભાજક લીટી પર મૂકશે તો તેની બે અણીઓ પહેલી વખત અ ને હ પર, ને બીજી વખત હ ને બ પર પડી રહેશે. એટલે અચ લીટી દ્વિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી કોઈ પણ લીટીના, જે સંખ્યા બેનો ધાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩-૨", ૪-૩", ૨-૯", ૩-૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

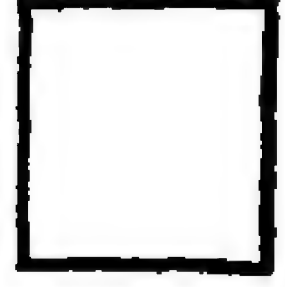
કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત:—અચ લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી અચ લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે અ છેડે બ ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨-૫", ૩", ૩-૭", ૩-૩", ૪-૯"...લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ફુટ છે ?

“ચાર ફુટ.” એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટી-આની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે ? “ આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે. ” આ ઉપરથી પાટીઆની લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે ? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની ? “ચાર ફુટ”



આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહોળાઈ માપો. તે કેટલી છે ? “અર્ધો ઇંચ.” આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહોળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે ? “ ચાર ફુટ. ” આ કેમ સમજાયું ? “ પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તો અર્ધો ઇંચ પહોળાઈ પણ ૧ ફુટ દર્શાવે છે. ?

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દોરેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશો કે ? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હોવી જોઈએ ? “ચિત્ર અને ટેકરી એ બેની ઉંચાઈનું પ્રમાણ”



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ, પહોળાઈ, વગેરે) અને ખરું અંતર એ બેની વચ્ચેના પ્રમાણને અંતરપ્રમાણ (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હોય તો આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરું પરિમાણ શું છે તે જણાશે કે ? “ના.” ઠીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હોય તેટલી મોટી દોરવા જઈએ તો શી અગવડ પડે ? “.....”

‘ વસ્તુ જેટલા કદની હોય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દોરી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, બહુજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રોની મદદથી (ફોટો વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હોય, તોપણ તે નરી આંખો વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી

નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મોટી દોરવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મોટા હોય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જેટલી મોટી દોરવા માટે ઘણાજ મોટા કાગળ લેવો પડશે; માટે તેમની આકૃતિ તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઇંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{1}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૬૩૩૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{2}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૩૧૬૮૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{3}{૫૨૮૦ \times ૧૨}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય;...વગેરે.

પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર કાઢો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાંચી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ, વગેરે.

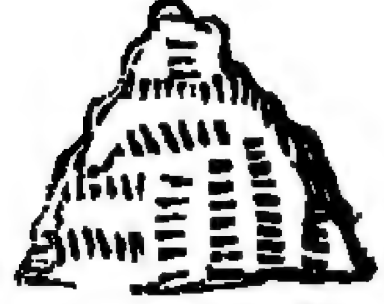
૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧" : ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે, તો તેની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* આ નિશાની ફુટ માટે છે દાખલા તરીકે ૫' = ૫ ફુટ.

૩. પાસે દેખાડેલા ડુંગરની ઉચાઈ કાઢો. સ્કેલ

૧"=૧૦૦૦.'



૪. એક માઇલ માટે એક ઇંચ પ્રમાણ લઈને જેમની વચ્ચે ૨૩ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. ૧"=૨ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો રસ્તો કાઢો.

૬. ૧"=૧ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર ૨.૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. ૨"=૧ યાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને ૪૫" ઉંચી લાકડી ઉભી લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના—નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં જોઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. ૫૦૦' લાંબા અને ૧૦૦' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સે.મી. \times =૧૦૦'.)

૯. ૩૨૨' લાંબા અને ૧૮૨' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સે.મી.=૧૪'.)

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે ૪૦૦' અને ૩૦૦' છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની જડાઈ ૧૦' છે, એવા તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧"=૧૦૦'.)

૧૧. વક્ર સીઢી અઢ ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે. અ ભીંતનો પાયો છે. હવે અવ=૬' અને અક=૮' હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?+

\times સે. મી.=સેન્ટિમીટર

+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ લીટી માપીને સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણ સત્યવડ પ્રમાણે ગમે તે લેવું.

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં અબ અંતર ૯' અને અક ૪૦' હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે, અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી એરડીના ભોંયતળાયાની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા બે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[સૂચના—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ, આ પાસપાસેની બધી દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિદ્યાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ બરાબર પૂર્વમાં ૮૦૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી બરાબર ઉત્તર તરફ ૫૦૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આવો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ અ આગળથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી બરાબર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી બરાબર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો અ બ વચ્ચે અંતર કેટલું ?

૧૬. બ, અની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે; ક, બની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે; ઢ, કની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો અથી ઢ કેટલો આવો છે?

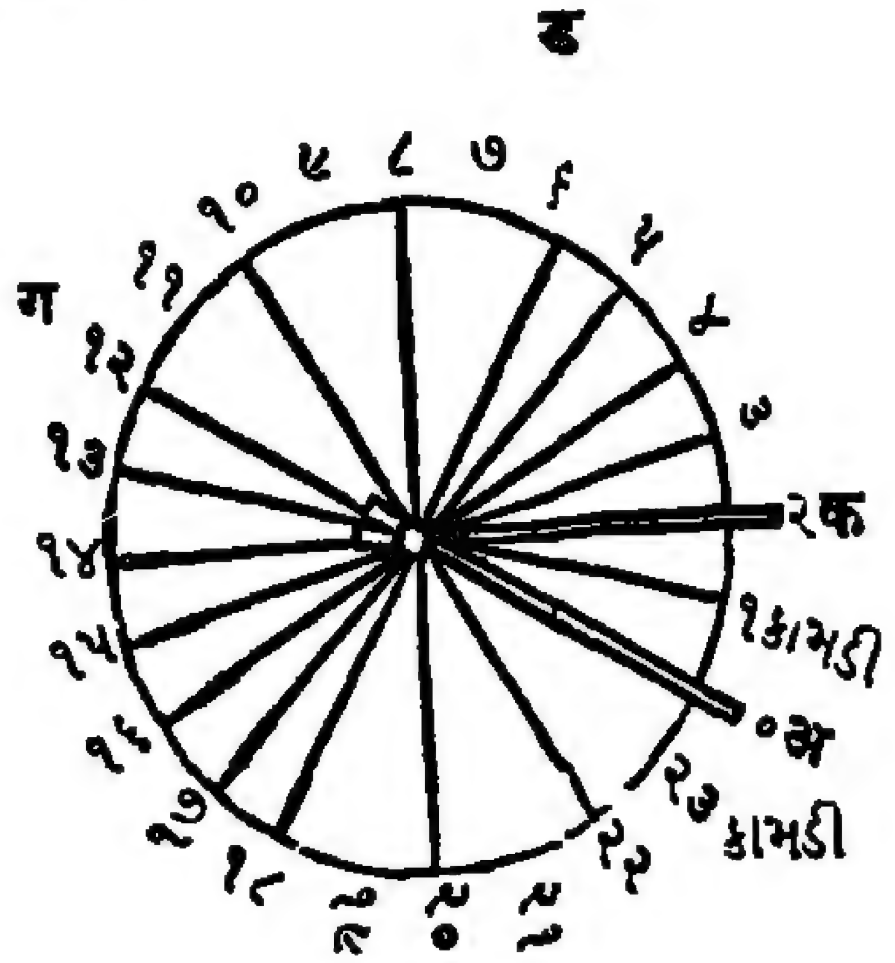
૧૭. અની પૂર્વમાં ૬ માઇલ છે; બની દક્ષિણમાં ૨ માઇલ છે; કની ઈશાનમાં ૬ માઇલ છે; ઢની વાયવ્યમાં ૪ માઇલ છે; તો અથી ઈ કેટલા માઇલ આવો છે ?

૧૮. અથી ૬ પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે; અને ક સ્થળ અની બરાબર ઉત્તરમાં અને બની બરાબર વાયવ્યમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

પ્રશ્નો.

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ પર ચોઢે વાંસની બે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક છેડામાં કાણું પાડો,

અને કાણુંમાં તાર કે ટાંકણી ધાલીને તેના છેડા વાળો, અને મજગરા જેવું બનાવો. પછી આ બે કામડીઓથી બનેલો કંપાસ લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાડ્યા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ બેસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ



તરફનો એટલે છુટો છેડો ધડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મજગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી બેડી દીધા છે ત્યાં) પ્રશ્નો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો અને “આ બે કામડીઓ એક બીજીને મળે છે ત્યાં આગળ જે પ્રશ્નો બન્યો છે તેને કાણુ કે પ્રશ્નો કહે છે,” એમ કહો. કાણુ એટલે પ્રશ્નો. બધા પ્રશ્નો બે લીટી+ કે બે બાજુઓ મળવાથી જ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના પ્રશ્નો બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના પ્રશ્નો, ભીંતો એક બીજીને જ્યાં મળે છે તે પ્રશ્નો.....વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુંડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો પ્રશ્નો બનાવો. પહેલાં

+ આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ધણેખરે ઠેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

કરતાં હવે ખુણો મોટો થયો છે કે ? પહેલાં કામડીનો છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો ? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણો કેટલાગણો મોટો છે ? “બમણો.” કામડીનો છેડો જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણો મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણો કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો+ તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. “મોટો છે” એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણો વધારો, અને આ ખુણો જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણો નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણો કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ પૈકી મોટો કયો એમ પૂછો. બંને સરખા છે એમ કહે, તો “એટલા મોટા ખુણાને કાટખુણો કહે છે” એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીનો છેડો આગળ ખસેડો, અને થએલો ખુણો કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડો આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીનો છેડો જ અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણો કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીનો છેડો ઢ રથળે આવતાં સુધીમાં જો એક કાટખુણો થાય છે, તો છેડો તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણો થશે ?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજા કામડીના છેડાને ફરવું પડે છે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી

+ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ સમ્પન્નો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ, પણ તે ખુણો હાથે દેખાડવો. ઉપલો સમ્પન્ન કેવળ શિક્ષકો માટે ચોજેલો છે.

અર્ધો કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે ?...વગેરે.

સૂચના—હવે પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, પરિઘ, ત્રિજ્યા, કોસ, જ્યા, વગેરે સરખાઓના માહિતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું બિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને વર્તુળ કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો પરિઘ કહે છે.

પરિઘના કોઈ પણ ભાગને કોસ કહે છે.

વર્તુળના જે બિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું મધ્યબિંદુ કહે છે.

મધ્યબિંદુથી પરિઘ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને ત્રિજ્યા કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્ધો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના કરતાં મોટો છે કે ? પહેલાંનો ખુણો કેવડો છે ? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? “એક અઠમાંબ.” આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણા મોટા કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? “છેડા આગળ ખસેડવો જોઈએ.” ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણા મોટા થશે કે ? “ના.”

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણો બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે ? “ ના.” આ ખુણા નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? ખુણા નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. “દરતી કામડીનો છેડા પાછળ ખસેડવો જોઈએ.”

પરિમાણમાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણા મોટા છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણા મોટા છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમના શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જોટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિભાજક, ઉપર કહેલા (૨૧મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવાય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે ? “ ના. ”

એકથી બીજો જરા મોટા હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટા ખુણા કયો ? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણા મોટા એમ કદાચ છોકરા કહે. તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટા ખુણા કયો તે છોકરાઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે ? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે ? “ ના. ”

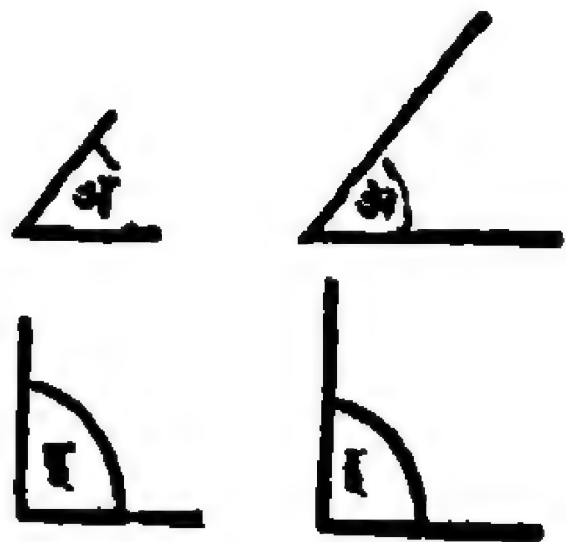
અલબત્ત ખુણો બનાવવા માટે બકનો જ છેડો વર્તુળના કે ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડ્યો. તો તેવડોજ બીજો ફર્ફ ખુણો કરવા માટે ફર્ફનો જ છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે ? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે ?

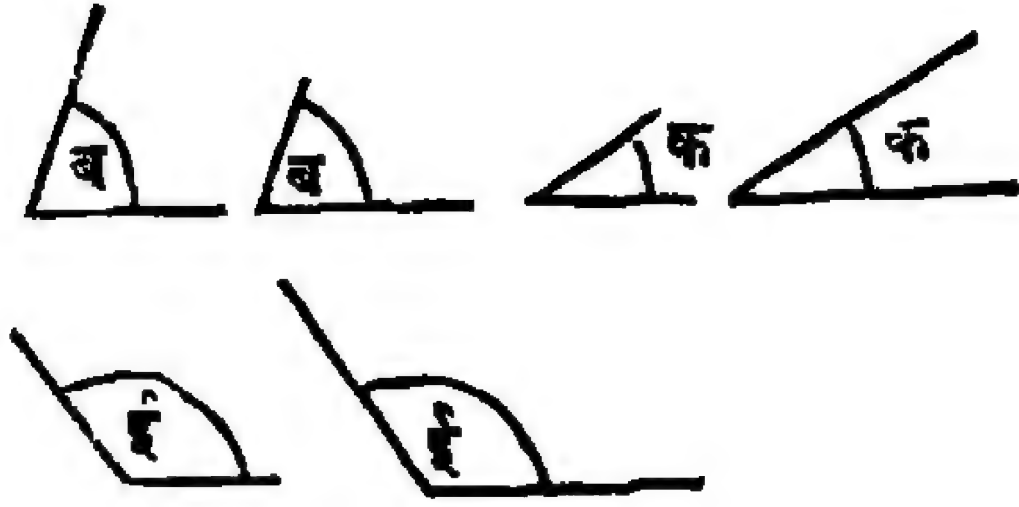
“ જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે.”

ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીત:—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂક્યો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં તેમના ઓછાવતા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાજુઓની વચ્ચે જે જગા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો બીજા-કુલ સંબંધ નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું.





દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પહેલી ગડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ગડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને પછી બીજી ગડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચેવચ્ચે અનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડો. નિશાળમાંની વસ્તુઓના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મોટા છે, એ પૂછો.

કાગળનો વર્તુળાકાર કકડો લઈને ઉપરોક્ત પ્રયોગ કરો, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયોગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છોકરાઓને મોટેથી કહાવો.

કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર બીજી લીટી પડી હોય ત્યારે તે (બીજી) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તો તેમાંથી દરેક ખુણાને કાટખુણો કહે છે.

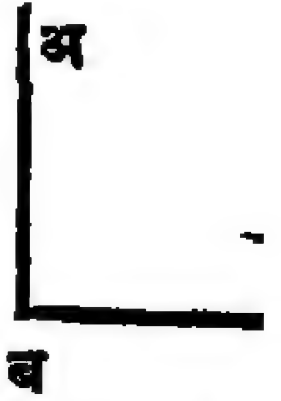
અથવા, ખુણાની બાજુઓના છેડાઓની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હોય છે (ખુણાની બાજુઓના બે છેડા

મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણે થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનો જે ખ્યાલ આપ્યો છે, તે પરથી બધા કાટખુણ સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લો. તેમનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એ એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકો; એટલે સઘળા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

એક લીટી બીજીની સાથે કાટખુણો કરતી હોય, તો તે બેમાંની દરેક, બીજી પર લંબ છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અબ, બક પર લંબ છે, અને બક, અબ પર લંબ છે.



કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીત:

પ્રયોગ—કાગળનો ગમે તેટલા કદનો કુકડો લો. તેની ગ તેમ ગડી વાળો. આ ગડીની ધારના ભાગ એક બીજા પર બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુઓ પહેલી ગડીની સાથે બીજી ગડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે ? “કાટખુણો આ પરથી કાગળ વાળીને દોઢ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ત કઈ રીત શીખ્યા ? “.....”

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો ? “આપેલ બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપેલ લીટીના ભાગ એક બીજા પર પડી રહે.”

બીજી રીત:—અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ હ અબ ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં ક બિંદુ અબની બીજા બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે ક વિભાજકની અણી ખોસીને, હ બિંદુ કરો; અને કહ સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લો, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે ? “ ચાર. ”

સૂચના—ધડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ધડિઆળના બંને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટો ફેરવ્યો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

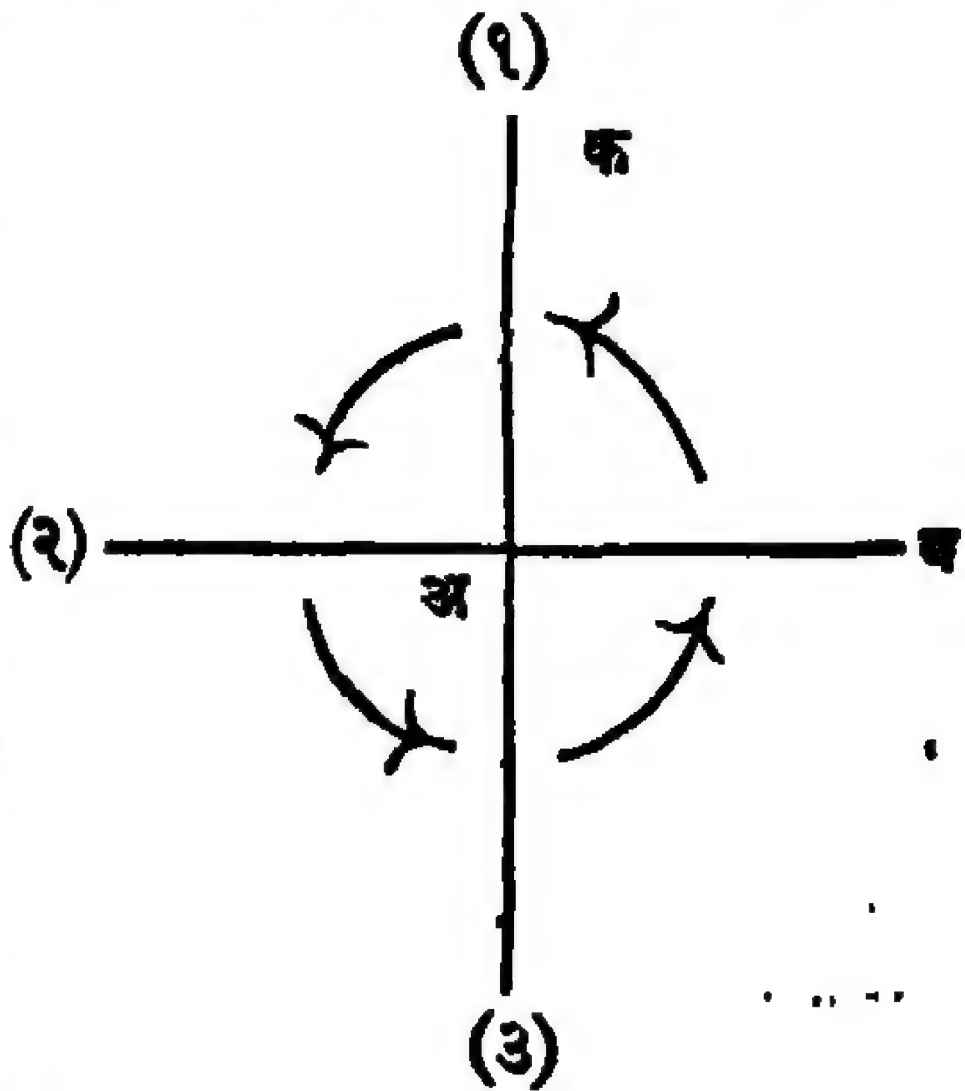
૨. ધડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટો ઉલટો ફેરવીને ૧૨ પર આણ્યો હોય, તો તે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાવી નાનો થશે કે મોટો ?

૩. એક કાંટો ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં અક સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જે અબ, અક વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને અકનો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જે અબ, અક વચ્ચે બે કાટખુણા થાય, તો

અક (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે અબ, અક વચ્ચે જે ખુણો થાય તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય ? અક સળી (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણુની દિશામાં જઈ આખરે અબ પર પડે તો અકસળી જે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ?



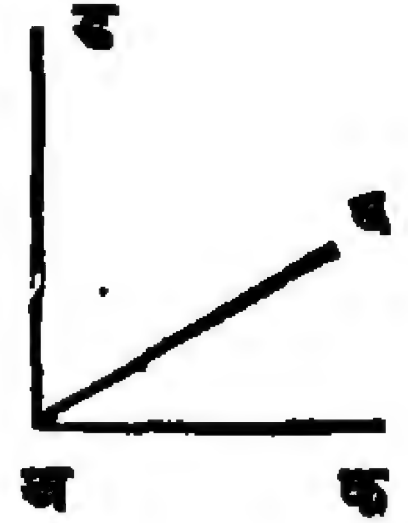
પહેલાં કહ્યા પ્રમાણે કાગળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. જે બિંદુમાં બંને સળો એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે ?

ઉપલા જે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગ્યાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે ? “ તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે.”

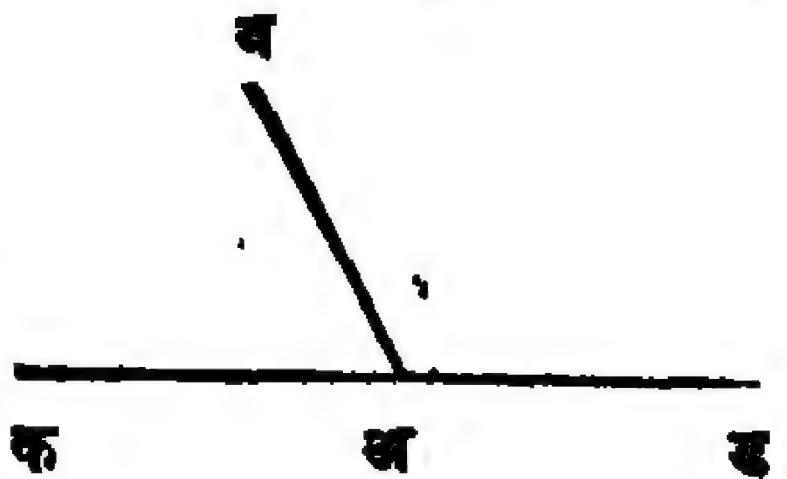
એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી હોય, તે તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા ?

વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને સાંકડો ખુણો કહે છે.
કાટખુણાથી મોટા ખુણાને પહોળો ખુણો કહે છે.
જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એક બીજાના કોટિખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **ક** અને **ક** એક બીજાના કોટિખુણા છે.

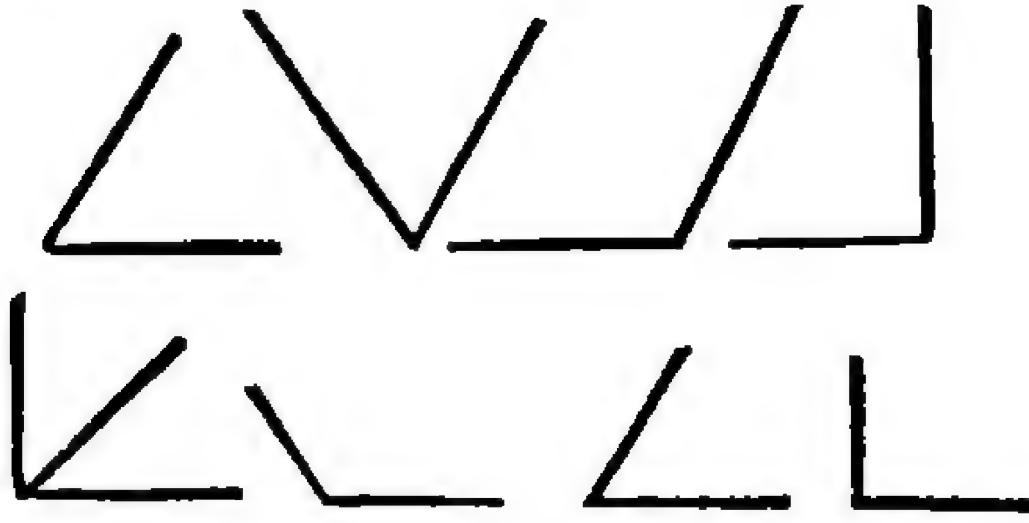


જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **ક** અને **ક** એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા છે.



ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહો.



નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કોટિખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહો.

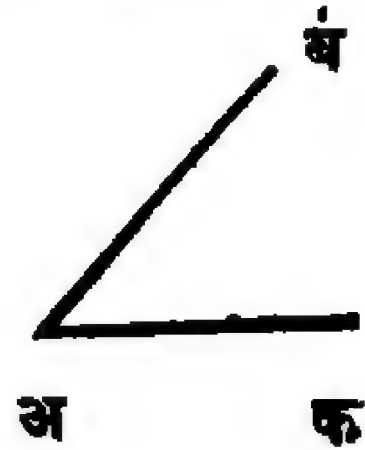
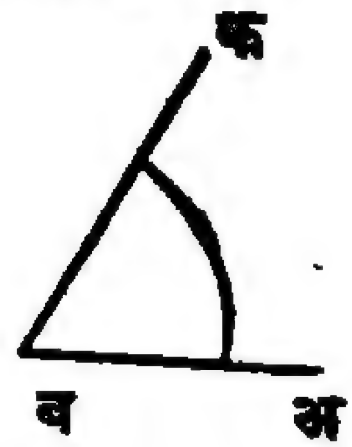


ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જો બે લીટીઓ મળીને ખુણો થાય છે, તેમને તે ખુણાના ભુજ કે બાજુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં વક, વઅ તે ખુણાના ભુજ છે.

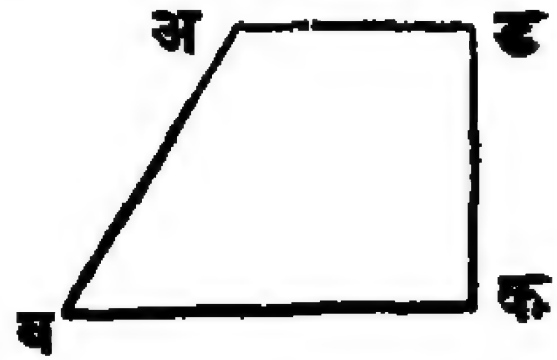
ખુણાના ભુજ એક બિંબને જો બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું શિરોબિંદુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં વ શિરોબિંદુ છે.

ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરોબિંદુની પાસેનો અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનો રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને વઅક કે કઅવ ખુણો કહે છે.



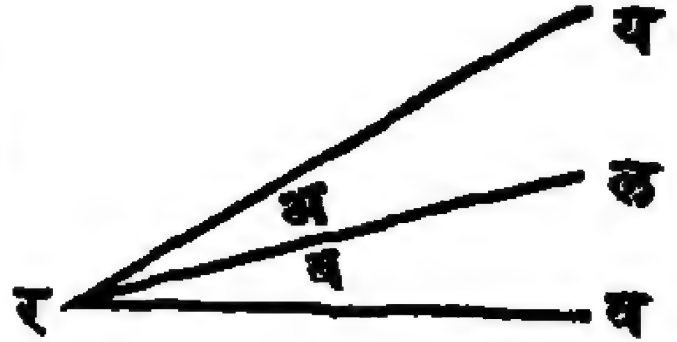
કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ થઈને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના જે ખુણા ક્રમે આવે તે ક્રમ તેના ખુણા પાસના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરૂંએલી આકૃતિઓનાં નામ ધણી રીતે આપી શકાય છે.

દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ અબકઢ, બકઢઅ, કઢઅબ, ઢઅબક, આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ ધઈને તે ખેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.



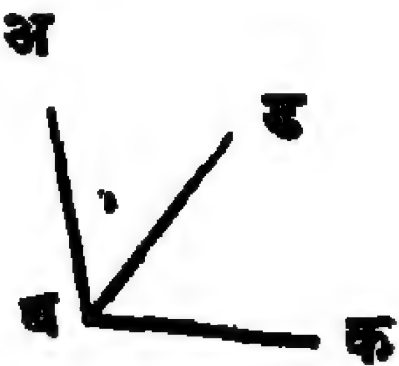
આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ અઢકબ, ઢકબઅ, કબઅઢ, બઅઢક, આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

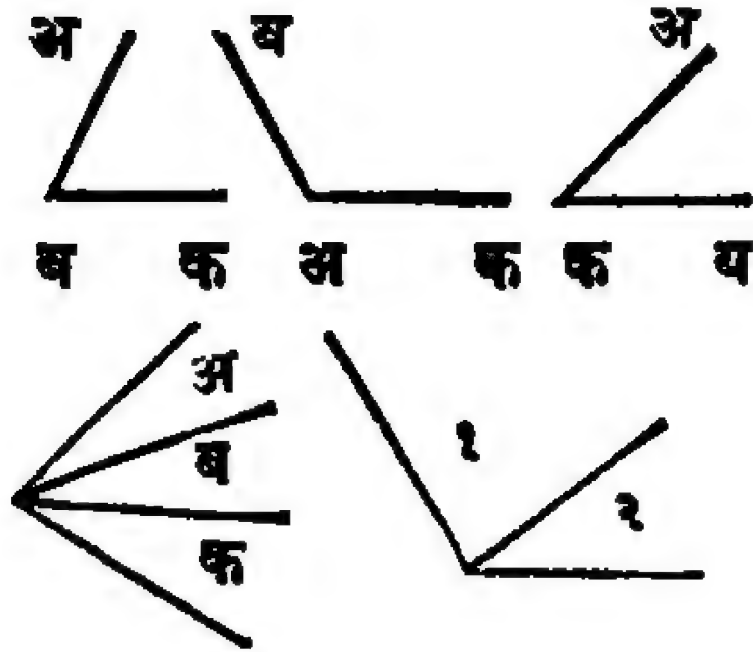
કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અ ખુણો એટલે ચરલ ખુણો, અને બ ખુણો એટલે લરબ ખુણો.



‘ખુણો’ એ શબ્દને બદલે \angle આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે \angle અબક એટલે અબક ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો.....વગેરે.

• પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જ્યારે બે ખુણા એક બીજાને અડકેલા હોય ત્યારે તેમને પાસપાસેના કે પાસેના ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં અબઢ અને ઢબક, એ પાસપાસેના ખુણા છે. અબક ખુણાને અબઢ અને ઢબકનો સરવાળો કહે છે.





ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવો. તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

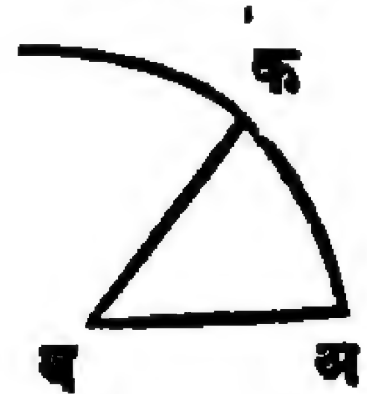
બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત.

એક ખુણાનો છાપો* ટિશુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી, કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને† તે કાપી

* છાપો કે છાપ—આકૃતિ પર ટિશુપેપર રાખીને કરેલી નકલને છાપો કે છાપ કહે છે.

† આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીત:—જો અવક ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય તો તે ખુણા નીચે બીજો કાગળ રાખવો; અને ખુણાનાં અ, વ, ક, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણું પડે તેમને અનુક્રમે અ, વ, ક, નામ આપીને અ, વ, વ, ક સાંધવાં. અવક ખુણો અવક ખુણા બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

કાણમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીત:—આપેલો ખુણો અવક, વક લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. વ મધ્યબિંદુ ધારીને વઅ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના ક્રૂરા અવક ભાગમાં યઈને વક ફરી છે માટે અવક જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા વર્તુળના તેટલા ભાગમાં યઈને ખુણાનો ભુજ ફેરવ્યો એટલે

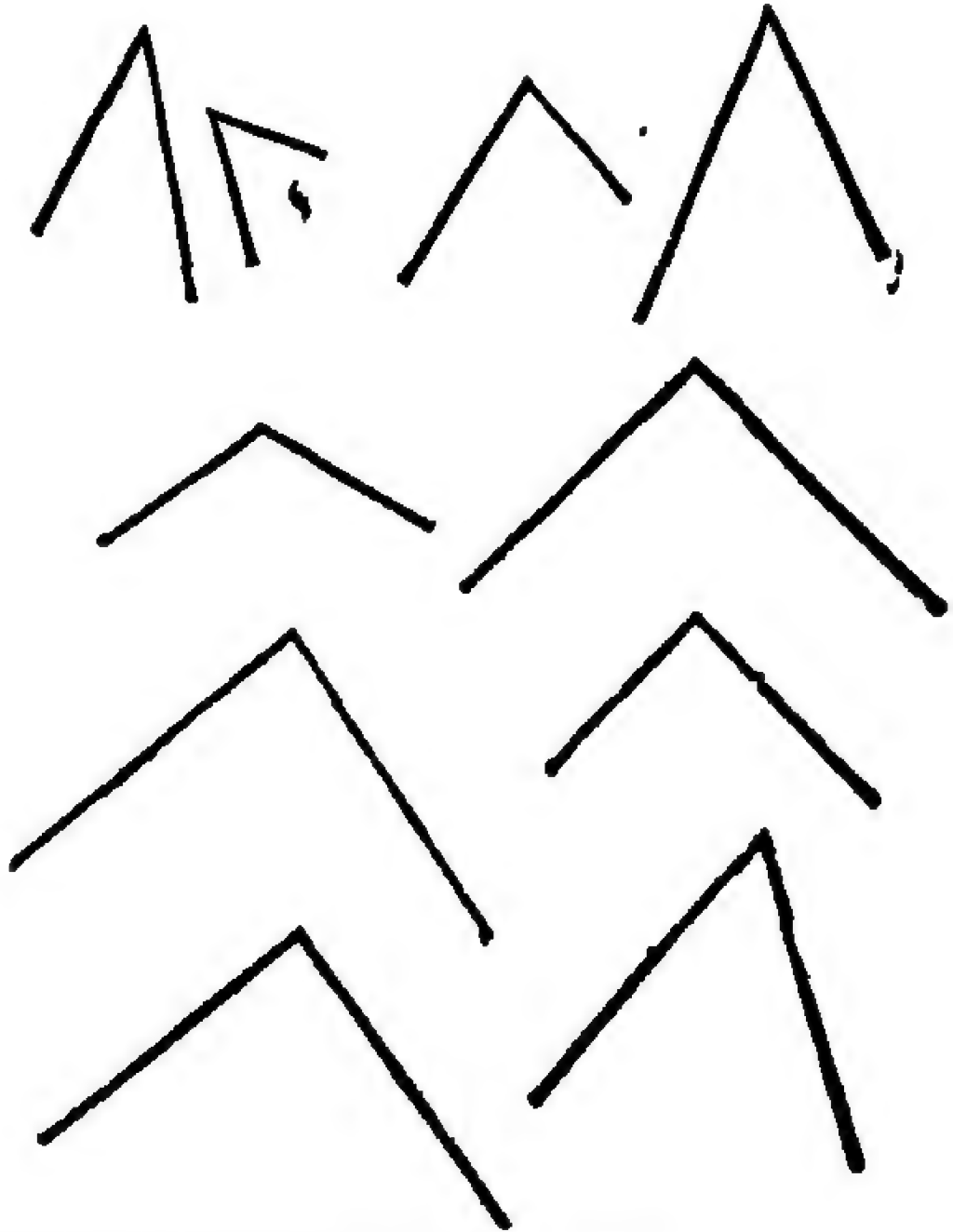


કાઢવો. પછી તે ખુણા બીજા ખુણા પર મૂકીને કયો ખુણા મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપરો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું.

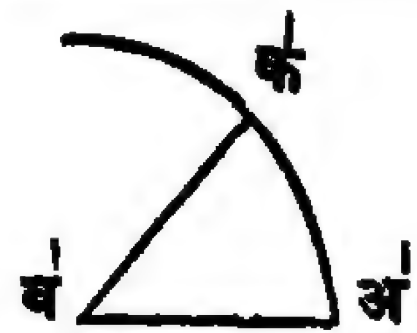
પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક જોડામાંનો કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં આપેલા ખુણામાંથી કયો મોટો છે તે અટકળથી નક્કી કરો, અને પછી ઉપર આપેલી રીતે સરખામણી કરીને તમારો જવાબ ખરો છે કે નહિ તે જુઓ.)

નાની મોટી બાજુવાળા ચારપાંચ કાટ-ખુણા હાથે દોરો; તે જ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.



બસ. જોરલા માટે જાણ જરૂરી બીજા
જાણ લીધી દોરો. જાણ મધ્યબિંદુ
ધારીને જાણ ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ
દોરો. અંક કોસનું અંતર વિભાજકથી



માર્ગ, અને તે વિભાજક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી

પુણાના વિભાગ અને પુણા માપવાની રીત.

જેનો એક પુણો કાટપુણો હોય એવો કાગળનો કકડો લઈને કાટપુણનો એક ભુજ ખીજ પર પડે એવી રીતે તેને વાળો. કાટપુણના કેટલા ભાગ પડ્યા? “એ.” જે ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા? “સરખા.” એમાંથી દરેક પુણો કાટપુણનો કેટલામો ભાગ છે? “અર્ધો.” આ પુણાને ફરીથી વાળીને તેના જે સરખા ભાગ કરો. દરેક પુણો કાટપુણનો કેટલામો ભાગ છે? “એક ચતુર્થાંશ.”

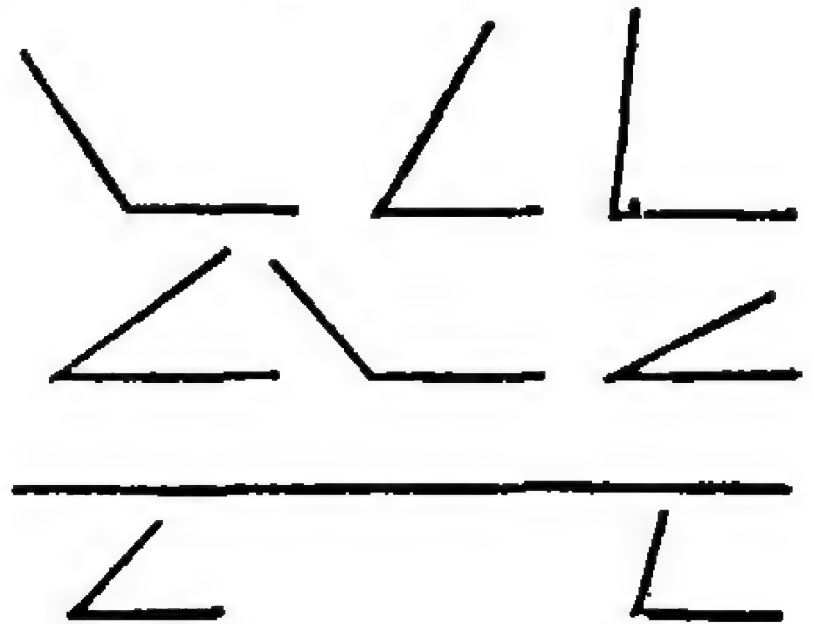
જેમ કુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટપુણના ૯૦ સરખા ભાગ કહીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કોણમાપક પરના કાટપુણના ભાગ દેખાડવા.)

પુણાનું નાનામોટાપણું પુણાની બાબુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિધના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી ખીજ બધા પુણા માપવાના રિવાજ છે. પુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ

કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ અંક છે. વર્ક સાંધો. અંબર્ક પુણો આપેલા પુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

નીચે આપેલા પુણા જેવડા પુણા દોરો.

પાસે આપેલી લીટી જેવડી
લીટી દોરીને તેના બે છેડા
આગળ, આપેલા બે પુણા જેવડા
પુણા કરો.



કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

[‘અંશ’ એ શબ્દને ટેકાણે ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકે:—૧૦° એટલે દસ અંશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તો અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા ? પા કાટખુણામાં કેટલા ? $\frac{૧}{૩}$ કાટખુણામાં કેટલા ?

૨. ધડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૩. ધડિઆળમાં બરાબર બે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૪. ધડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯.....વગેરે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહો:—પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઈશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઈશાન—પૂર્વ,* વાયવ્ય—ઉત્તર અને પૂર્વ.....વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સૂચના—જે ખુણો માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ

* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

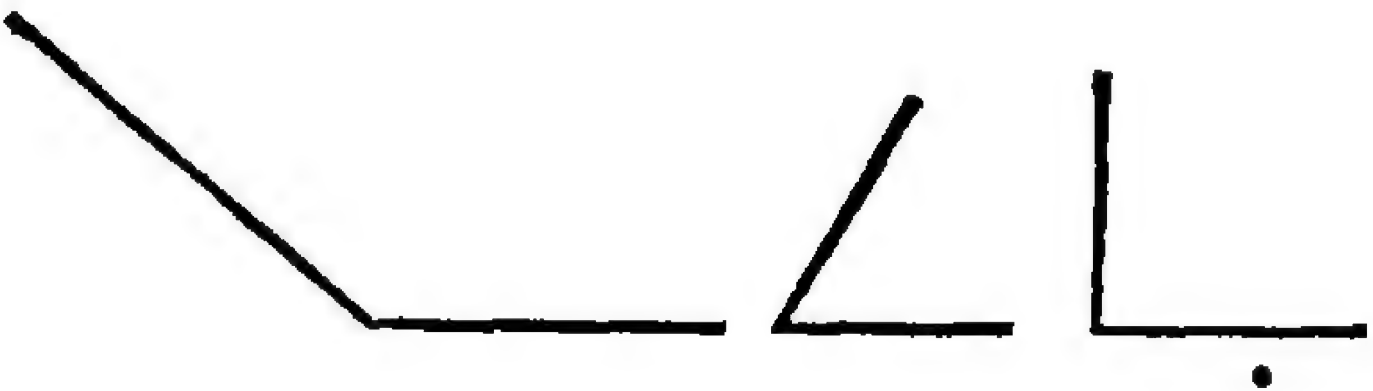
પર કોણમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે ચર્ચ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. નેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશા ટેવ રાખવી એ સાચું છે.

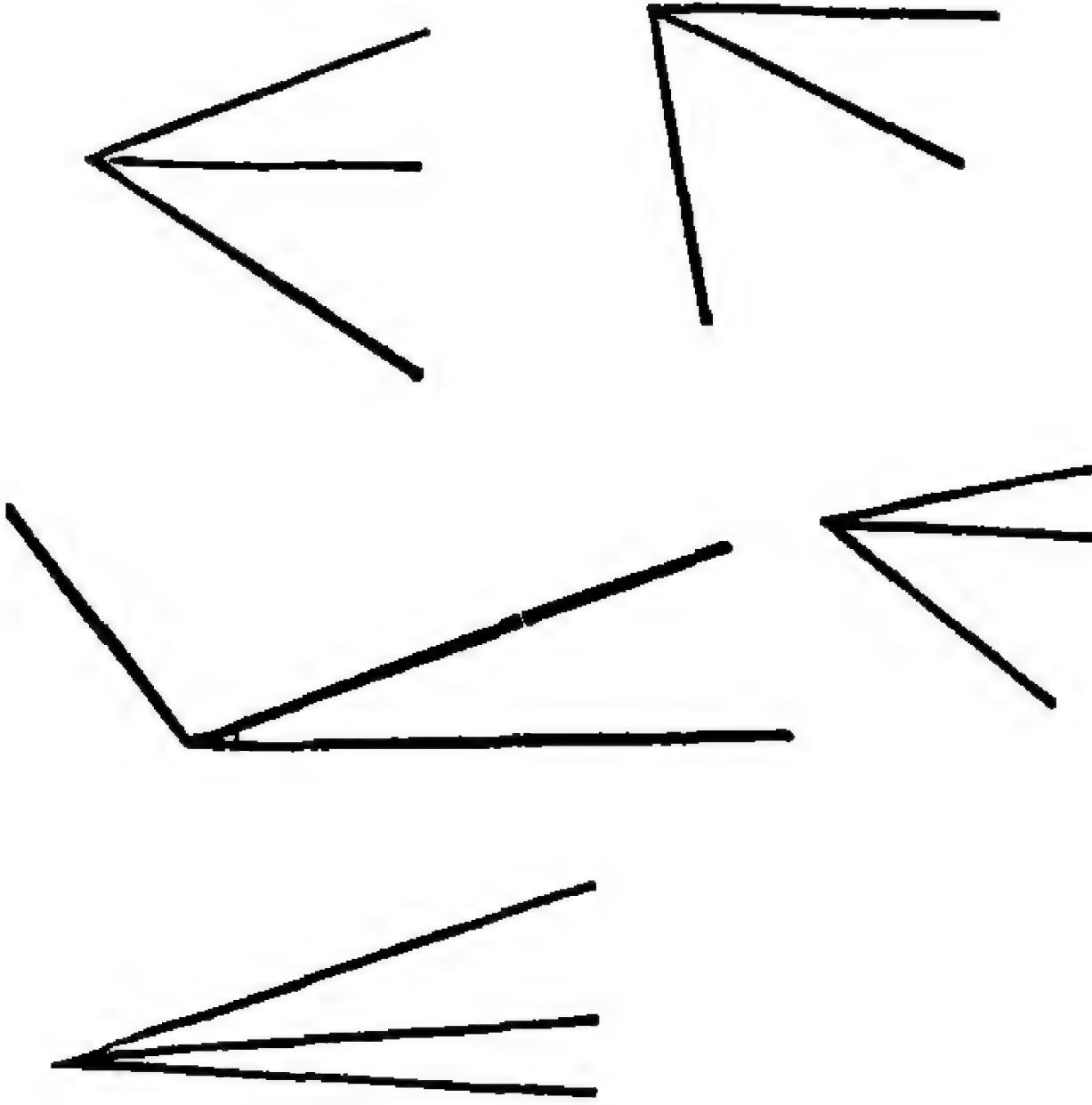
ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં અટકળથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણમાપક પરના આંકડા ખોટી બાજુએથી ગણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જણાઈ આવશે.

પ્રશ્ન.

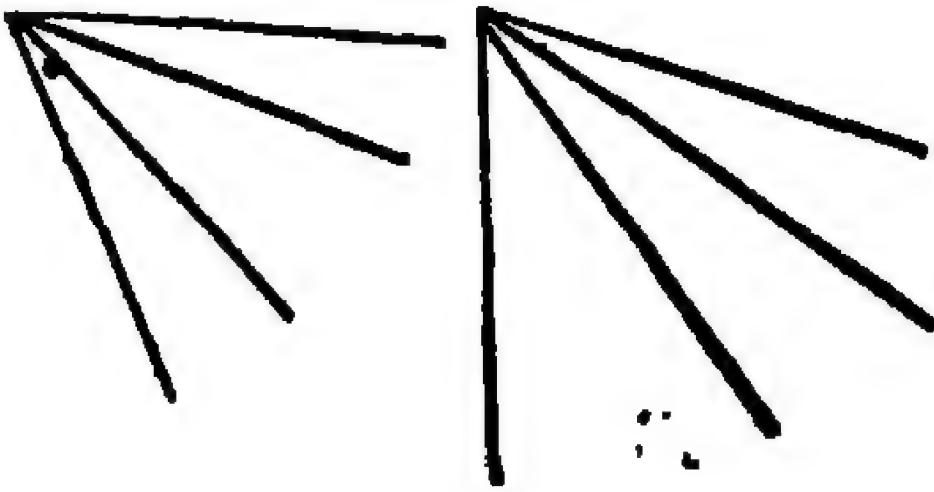
૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.

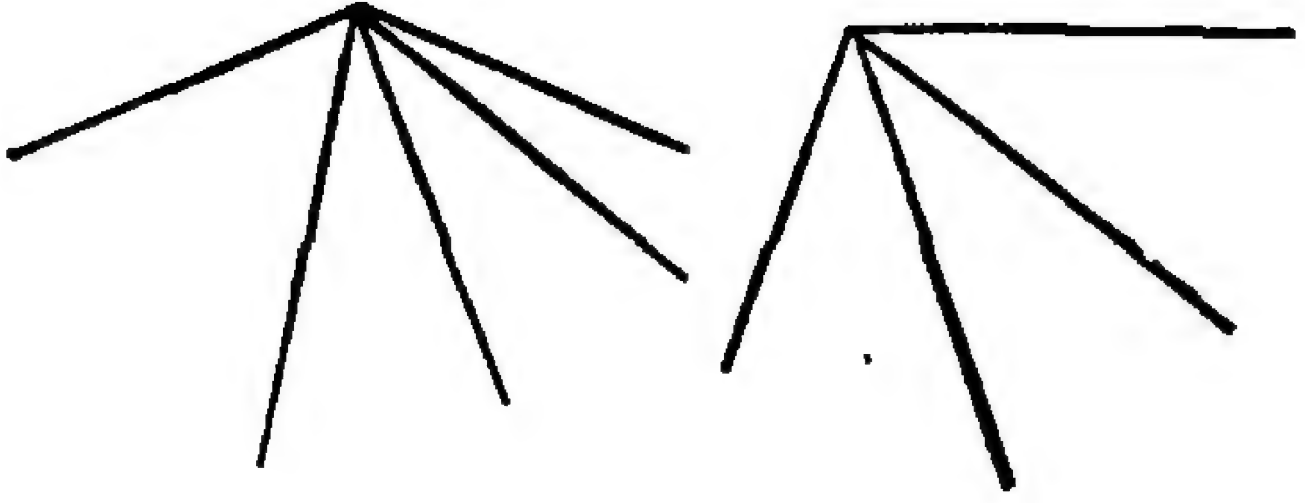


નીચે આપેલા પાસપાસેના ખુણામાંનો દરેક ખુણો માપો; અને તે બે ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આખો ખુણો માપો, અને તે પરીથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.



૪. ઉપર પ્રમાણેજ નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશ સુધી તફાવત પડે તો તે દરજુબર કરવામાં હરકત નથી.)





૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આંધેના ભાગ પર કેટલાંક એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર-પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું માર્ગ પડ્યું ?
“તે સરખા છે.”

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણા દુભાગવાની રીત (કાગળની ગડી વાળીને):—આપેલા **∠** અથવા જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. અથ, થક પર

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાંકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે બે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૌંસ, પરિવ્ર, ન્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહિતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.]

બીજી રીત:—આપેલા અઘક ખુણાનું **અ** મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને **અ**, **બ** અને અતુકમે **હ** તથા **ઈ**માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. **હ**, **ઈ** મધ્યબિંદુ અને **હઈ** જેટલી ત્રિજ્યા લઈને **ક**માં એક બીજાને છેદે એવા કૌંસ દોરો. **ક** સંધો. **ક** આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

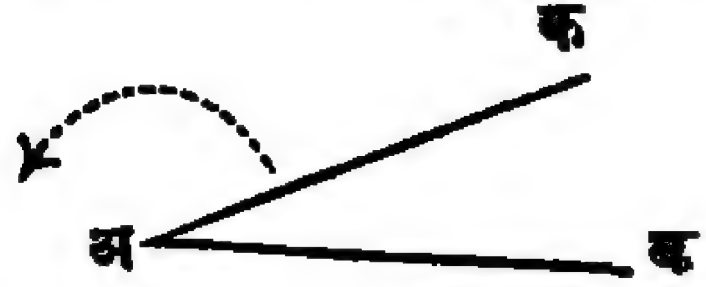
કૌંસ દુભાગવાની રીત:—અ **આ**પેલો કૌંસ છે. અબનો છાપો લો. **અ**, **બ** પર પડે એવી રીતે ગડી વાળો. ગડીથી અબના જે બે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

બીજી રીત:—એક અ **અ** કૌંસ લો. **અ** મધ્યબિંદુ અને અબના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **બ** મધ્યબિંદુ લઈને ઉપરના કૌંસને **ક** અને **હ**માં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. **ક** સંધો. અ **અ** કૌંસને **ક** દુભાગે છે.

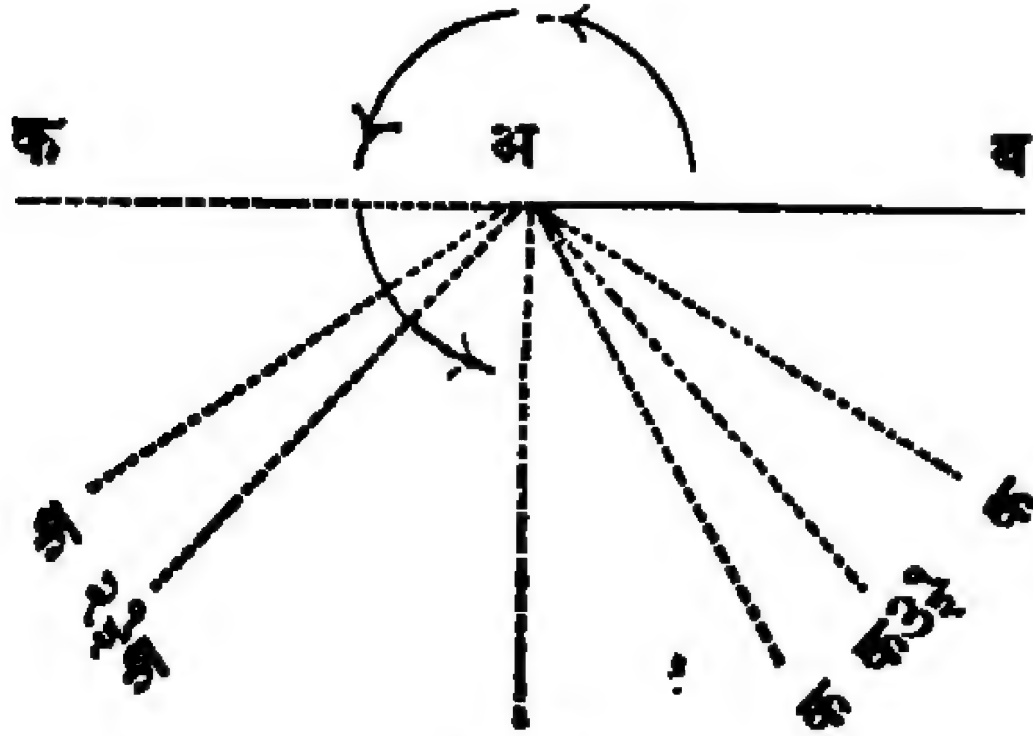
૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક અ **અ** કૌંસ લો. અ **અ** કૌંસને **ક** બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ મને **અ**, **બ**, **ક**ની સાથે સંધો. અમક અને અમક ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજા કૌંસ લઈને ઉપરો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાહ્યબાહ્ય વચ્ચેના કૌંસોની વચ્ચે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

બહિર્વક્રકોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની અબ સળી ન્યારે બાણુની દિશામાં (બહિઆળના કાંટાથી ઉત્તરી દિશા-માં) ફરતી ફરતી '૨'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવે છે, સારે તે અબની



(૨) ક અ વ



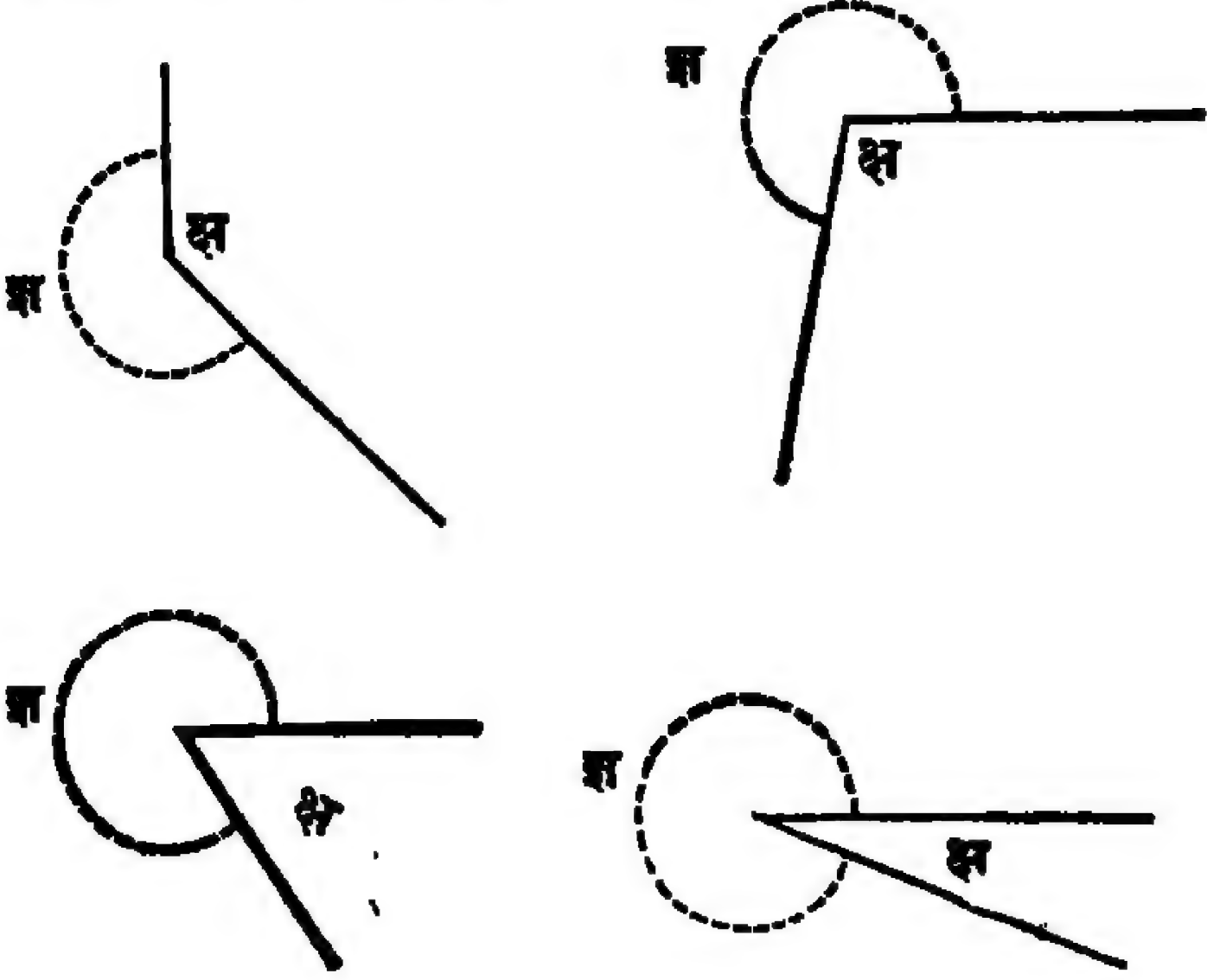
(૩)ક

સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે બે તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી '૩'થી દર્શાવેલે સ્થળે આવશે, તો તે અબ સાથે બે ખુણા કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટા થશે.

આ પ્રમાણે અબ સળી '૨'થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણુની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી અબ ઉપર નર્ધ પડે ત્યાંસુધીમાં અબ સાથે બે ખુણા કરશે, તે બે કાટખુણાથી મોટા અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક્ર ખુણા કે બહિર્વક્રકોણ કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી બે ખુણા થાય છે, તેને બહિર્વક્રકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નીચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા બહિર્વકકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો બહિર્વક દેખાતા નથી એ ઉધાકું છે.



[ઉપલા ખુણામાંથી કોઈ પણ ખુણો જાની બાબુથી જોયો હોય, તો તે બે કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે જાની બાબુથી જોયો હોય તો બે કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. જાની બાબુ પરનો ખુણો અંતર્વક ખુણો કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક ખુણો એટલે બે કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

પ્રશ્ન.

૧. ઘડિઆળમાં નવ વાગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો બહિર્વકકોણ થાય છે ?

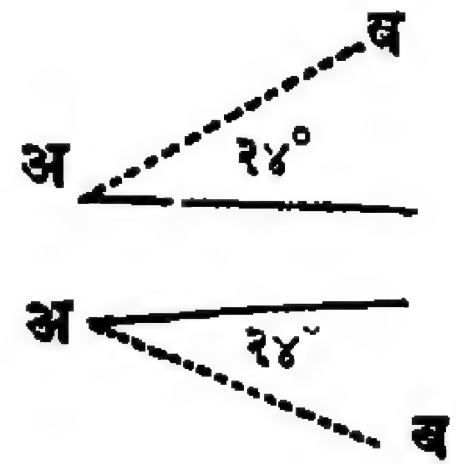
૨. બે કાંટાની વચ્ચેનો બહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે બહિર્વક ખુણો કેટલો મોટો છે ?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક ખુણા અંતર્વક ખુણાથી બમણો, ઝગણો, પગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—એ લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

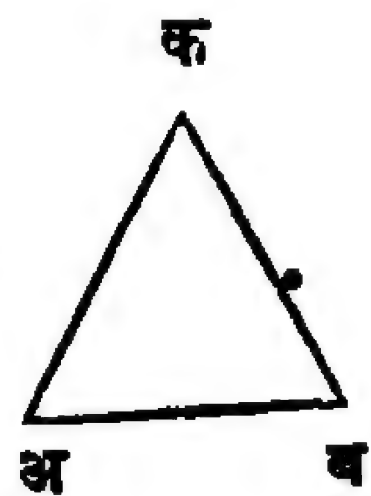
સાપેક્ષ દિશા.

એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીત:—ધારો કે **બ** સ્થળ **અ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ શોધી કાઢવું છે. **બ** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી કોઈક દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો **અ**માં થઈને જાય એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **બ**થી **અ** મુઠ્ઠી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો થાય છે તે ખુણો માપવું. ધારો કે આ ખુણો ૨૪ અંગૂળો છે. હવે જો **અ**થી **બ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો **બ**ની દિશા ‘પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે, એમ કહેવું; અને **અ**થી **બ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો **બ**ની દિશા ‘પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે’ એમ કહેવું.



પ્રશ્ન.

૧. **અ** અને **બ** એક ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો **અ**થી **બ** લીટી પૂર્વપશ્ચિમ હોય, તો **ક**, અની કઈ દિશામાં છે? **બ**ની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ **અ** સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને

બ સ્થળે પહોંચે છે; તો બ, અની કઈ દિશામાં છે ? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઈંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈ પણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા અવકાશ લંબચોરસમાં ક, અની કઈ દિશામાં છે ? અંબ બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ-૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. બની પશ્ચિમે અ ૨.૫ માઇલ છે અને અની દક્ષિણમાં ક ૪.૫ માઇલ છે; તો બથી ક કેટલું આધુ છે અને બની કઈ દિશામાં છે ?

૫. એક માણસ અ સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઈશાન તરફ ૮ માઇલ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો અથી બ કેટલું આધુ છે, અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૬. અ, બની વાયવ્યમાં ૧૭.૫ માઇલ છે; બ, કની ઈશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો ક, અથી કેટલું આધુ છે, અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૭. બ અને ક એ સ્થળો અથી બરાબર ૫ માઇલ પર છે અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં 36° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં 14° છે, તો બ, કની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે ?

૮. બ અને ક સ્થળોની વચ્ચે ૩.૫ માઇલનું અંતર છે, અને બ, અની બરાબર ઉત્તરમાં છે. ક, બની બરાબર પૂર્વમાં અને અની બરાબર ઈશાનમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

૯. અ અને બ બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અંતર છે. બ, અની બરાબર ઉત્તરે છે. એક વહાણુ બથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા અની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૯ અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વહાણુ ૫ મિનિટમાં કેટલું અંતર ચાલ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો ?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે.મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫"નો ખુણો થતા સુધી તે પહોળા કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દોટલા ખુંટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુંટાથી ૩૫ હાથ આધી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે ?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દોરવાની રીત:—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની અણીથી કે ટાંકણીથી આ બિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરો:—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો અલગ ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો કબજા ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો અલગ ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો બૂલ ક્યાં છે તે જોઈ શકો.

અલગ અને કબજા એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો:—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

અવક, કવઢ, ઢવઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના હો. અવઈ ખુણો માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે ભૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

અવક, કવઢ, ઢવઈ, એ ખુણા નીચેના અંશના લઈને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬, ૨૦, ૩૪; (૩) ૫, ૧૮, ૧૦૦.

અવક ખુણો ૧૩૦°નો લઈને તેમાંથી ૪૦°, ૩૦°, ૨૫°ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણો ૩૫°નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

બીજા ખુણા લઈને ઉપરો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે સાંસુધી અભ્યાસ જરૂરી રાખો:—૪૫°, ૨૨.૫°, ૩૦°, ૨૦°, ૬૦°, ૧૦°, ૭૦°, ૮૦°, ૧૨૦°, ૧૩૫°.

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ=ખુણો.

જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ). આ આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હદ



ત્રણ સીધી લીટીઓથી બંધાએલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ* કહે છે.

નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

અવ=૧.૩", \angle અવક=૩૦°, \angle અવક=૬૦°.

• „=૧", „ ૫૦°, „ =૫૦°.

„=૧.૮", „ ૬૦°, „ =૩૦°.

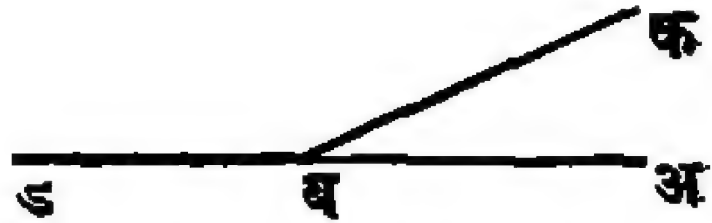
.....વગેરે.

* વ્યાખ્યા—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાએલી હોય છે તે આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

અવક ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની અવ બાજુ
: સુધી વધારો. કઘડ ખુણો

સાંકડો છે કે પહોળો ?



અવક કાટખુણો દોરો. તેની અવ બાજુ ઢ સુધી લંબાવો.
ઢઘડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

ગમે તેવડો એક અવક પહોળો ખુણો કાઢો. તેની અવ બાજુ
: સુધી વધારો. કઘડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

અવક ઢ કાટખુણા જેવડો કાઢો. અવને ઢ સુધી વધારો.
ઢઘડ ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નાના ઉત્તર આપો.)

ઢઘડ લીટી પર ઘક લીટી ઢભી છે:-

અને અવક ખુણો ૫૩ અડતો છે; તે કઘડ કેવડો હશે ?

”	”	૭૮	”	”	”	”
”	”	૧૧૦	”	”	”	”
”	”	૧૩૭	”	”	”	”

ઉપસા પ્રશ્નો પેઢી દરેક પ્રશ્નમાં અવક ખુણો કાટખુણાથી કેટલે
મંશે ઓછો કે વતો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે કઘડ ખુણો
કાટખુણાથી કેટલે અંશે વતો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી
અવક અને કઘડ ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે ?
“તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.”

ઉપસા પ્રયોગ પરથી, એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા
પાસપાસેના ખુણાઓના સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે ?

“એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની
એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમનો
સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.”

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

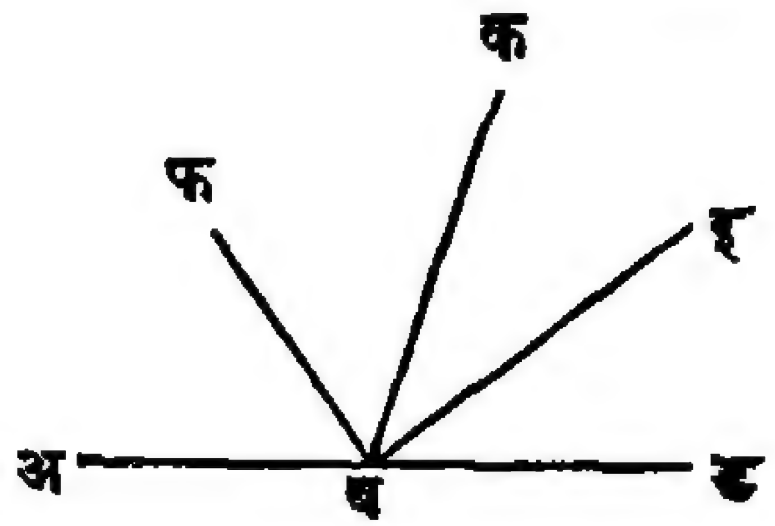
અવક એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—

ચક લીટી 64° નો ખુણો કરે છે, તો કચક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

„ 120° „ „ „ „

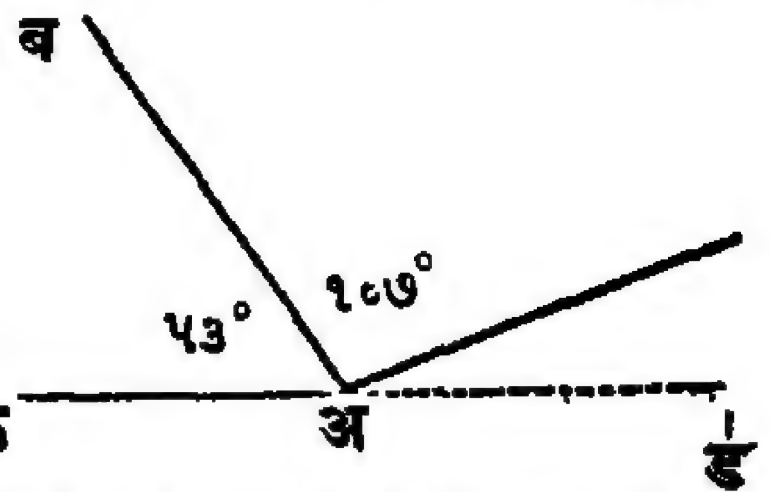
„ 129° „ „ „ „

અવક લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી ચક લીટી દોરો. કાગળ વાળીને અવક ખુણાને દુભાગો. તેજ પ્રમાણે કચક ખુણાને દુભાગો. ખુણા દુભાગનારા સળ ચક અને ચક લીટીઓ વડે દર્શાવો. ચક ખુણો માપો. તે કેવડો છે ?



આ ઉપરથી અવક અને કચક ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર જણાઈ આવે છે ? “બે કાટખુણા બરાબર.”

અવ લીટી લો, તેની એક બાજુએ ચક ૫૩ અંશનો ખુણો કરો. બીજી બાજુએ ચક ૧૦૭ અંશનો ખુણો કરો. કચક ખુણો કેટલા અંશનો થાય છે ? તે બે કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે ? કચક સીધી ક લીટી છે કે ? કચક સીધી લીટી દોરો. તે સીધી લીટી થવા માટે ચક અને ચક એ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ ?



ઉપરના પ્રશ્નોમાં ચક અને ચક અનુક્રમે ૫૦ અને ૧૧૦, ૧૦૫ અને ૭૫, ૫૧ અને ૧૨૯, ૧૧૦ અને ૯૦, ૪૯ અને ૧૪૧, ૩૦ અને ૧૭૦ લો અને ઉપરના જેવાજ પ્રયોગ કરી જુઓ.

આ ઉપરથી કઢાઈ લીટી સીધી હોવા માટે અવક અને કઢાઈ ખુણા વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ.”

અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૬૧° અને ૧૦૩° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૧૮° અને ૭૨° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૦૯° અને ૮૧° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૭૧° અને ૧૧૦° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

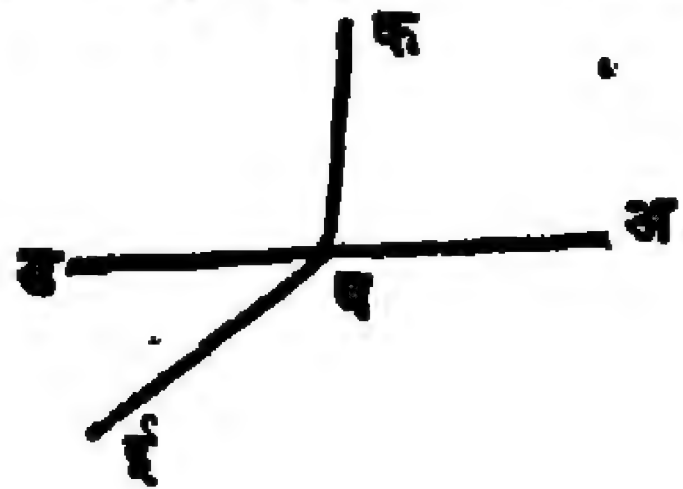
અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૫૦° અને ૧૩૦° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કઢાઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૩૫° અને ૫૨° હોય તો કઢાઈ સીધી લીટી થશે કે ?

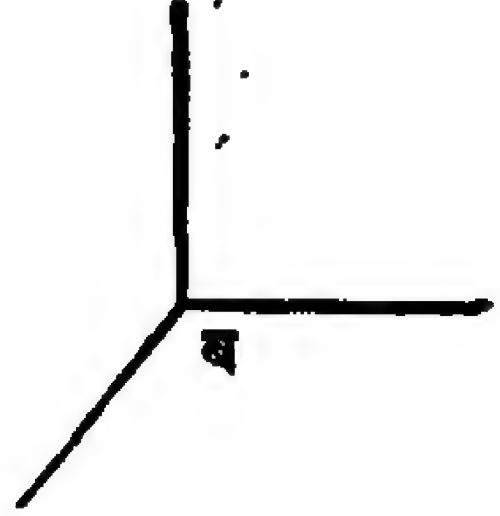
ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોય, તો તેમના બહારના ભુજો એક સીધી લીટીમાં હોય છે.”

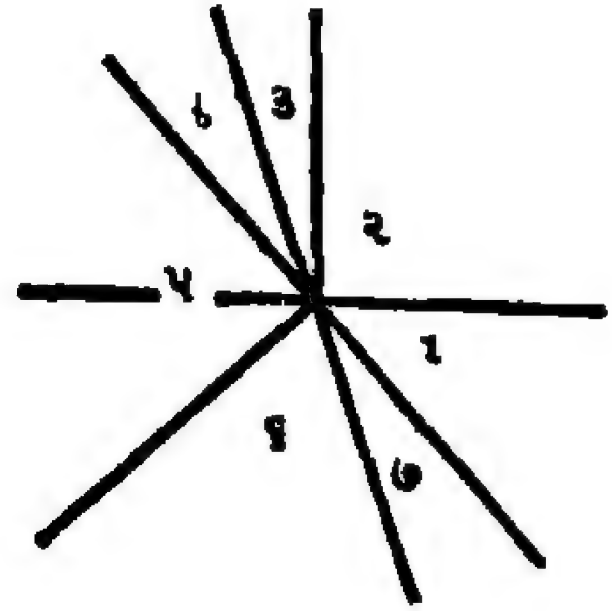
પાસેની આકૃતિમાં અવક અને કઢાઈ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે? આ ઉપરથી અવક, કઢાઈ, ઢબઈ, અને ઈંચા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે એ તમે કહી શકશો ?



જ યિઃમાંથી ત્રણ લીટીઓ જુદી જુદી દિશામાં દોરો. તેથી બનતા ત્રણ ખુણા માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?



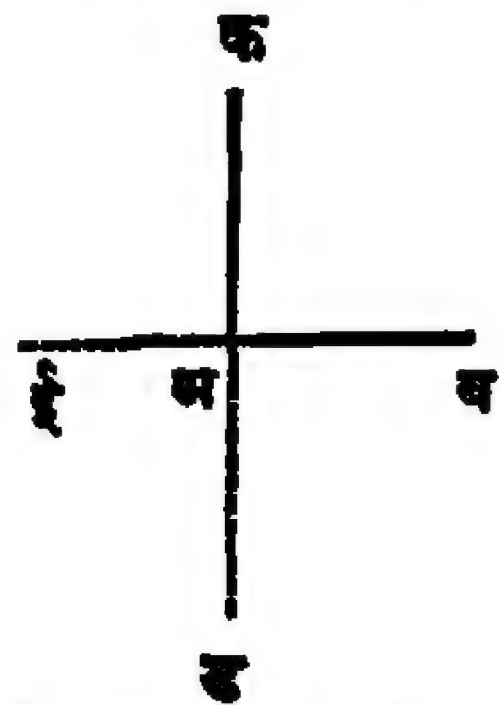
પાસેની આકૃતિમાં સાત ખુણા એક બીજાની જોડે આવેલા દર્શાવ્યા છે. એમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે, એ ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો.



ઉપલી આકૃતિમાંના છ ખુણાનો સરવાળો ૩૬૦ કાટખુણા હોય, તો બાકી રહેલો ખુણો કેટલો મોટો હોવો જોઈએ ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં છ ખુણાનો સરવાળો ૨૬૦, ૩૬૦, ૨૬૦ કાટખુણા ધારીને ઉત્તર કહો.

અબક કાટખુણો છે. અબને ઈ સુધી વધારેલી છે, અને કઅને હ સુધી વધારેલી છે; તો કઅઈ, ઈઅહ, હઅબ, એ પૈકી દરેક ખુણો કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

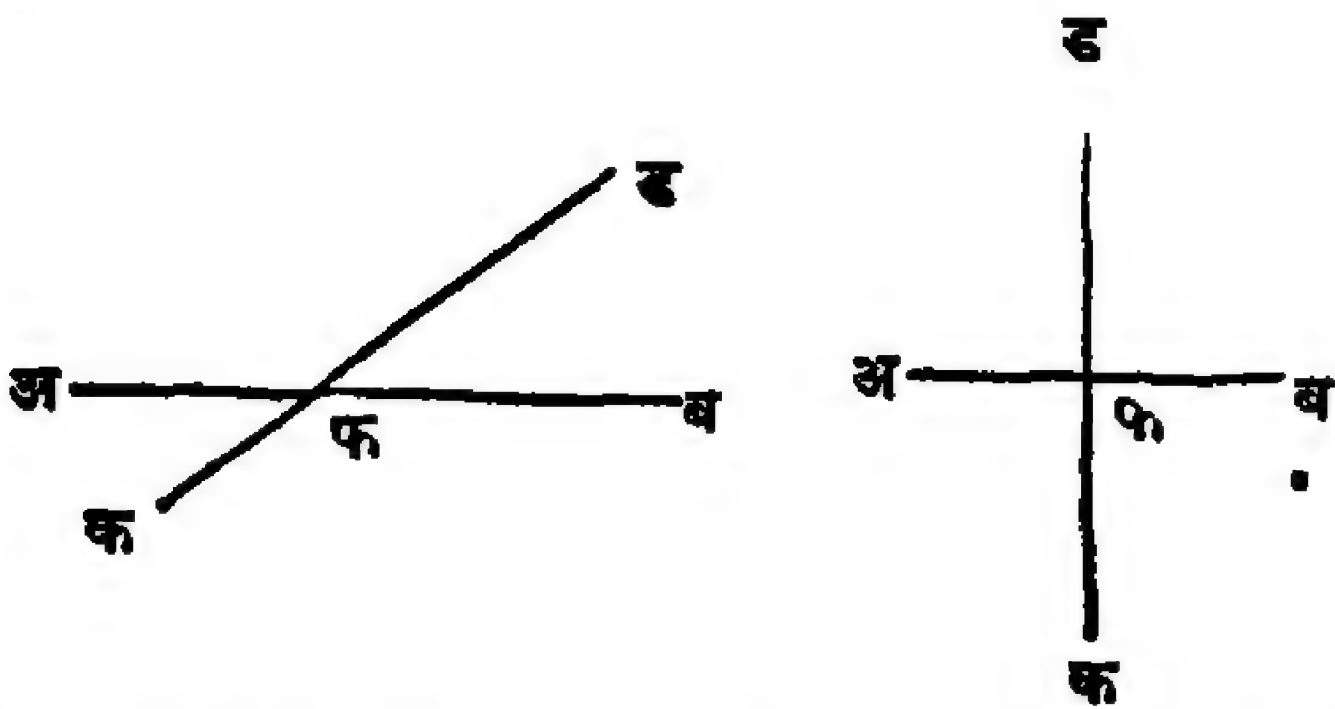


એક અબક લીટી દો. તે ૧૨ ગમે તે અહ લીટી દોરો. કાગળની ગડી વાળીને અબહ ખુણાને દુભાગો, અને તેજ રીતે અબહ ખુણાને દુભાગો. કાગળ પરના બે સળની વચ્ચેના ખુણો કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો. ઉત્તરતું કારણ આપો.

એક બીજને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા.

ગમે તેટલી લાંબી બે કામડી કે સળી લો, અને તે એકજ દિશામાં પડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી બે કામડી પૈકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજન છેડાની પણ $\frac{1}{2}$ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજની પણ $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, તેમજ પહેલાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપલો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થવી, એ કામડીના જે બે ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઈના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે ? “ના.”

ઉપલા પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :—



ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં ૨૧મા પાના પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

અવ અને કઢ કામડીઓને એક બીજી પર રાખીને **ફ** સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે **કઢ** કામડીનો **ઢ** છેડો જો વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **ક** છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં **ઢ** છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **ક** છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કોઈ પણ બિંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જે ખુણાઓમાં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક બીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

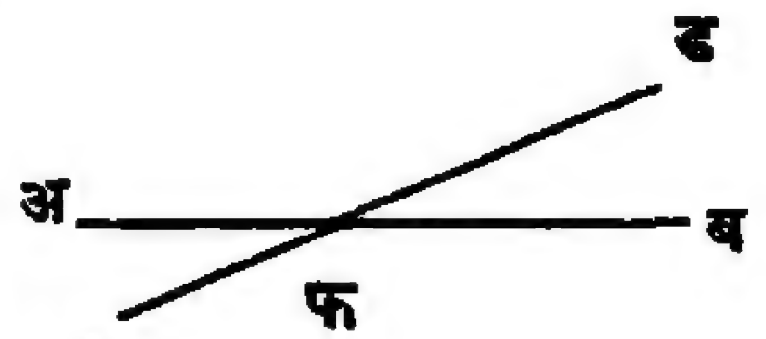
“ન્યારે કોઈ લીટી પોતાનામાંના કોઈ બિંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરે તે બિંદુથી ગમે તેટલાં ઓછાં વર્તાં હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે.”



અવ લીટી **ક** બિંદુની આસપાસ ફરે છે. જો તેનો **કવ** ભાગ 31° ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **કઅ** ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે ?

અવ લીટી પર **કઢ** લીટી (બંનેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. **કઢ** લીટી **અ** **ફ** બિંદુની આસપાસ ફરીને અવ સાથે **વફઢ** ખુણો 20° અંશનો

કરે, તો **અફક** ખુણો કેટલા અંશનો થાય ?



ઉપલા પ્રયોગમાં **ઢ** છેડો 45° , 60° , 75° , 90° અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **ક** છેડો કેવડા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં અફઢ ખુણો કેટલો મોટો થશે? કફઢ ખુણો કેવડો? ઘફઢ ખુણો ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

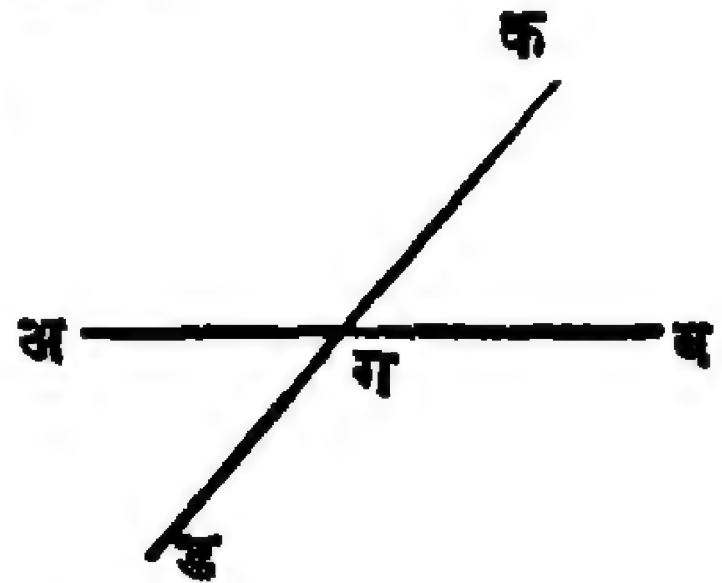
ઘફઢ ખુણો ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં અફઢ, અને કફઢ, તથા ઘફઢ અને કફઝ, એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે?

એક અફઢ લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે કફઢ લીટી દોરો. ઘફઢ ખુણો કાપી કાઢો, અને તે કફઝ પર મૂકો. તેમજ અફઢ ખુણો કાપી કાઢી તેને કફઢ પર મૂકો. તમને શું જણાય છે?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે? “બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.”

પાસેની આકૃતિમાં ઘગઢ ખુણો ૧૩૦° છે; તો અગઢ ખુણો ઘગક ખુણા બરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માધ્યાસિવાય સિદ્ધ કરો.



સમાંતર લીટીઓ.

કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની નોંડો પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક નોંડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓછું થતું જાય છે કે વધુ થતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે,” “કેટલીકની વચ્ચેનું

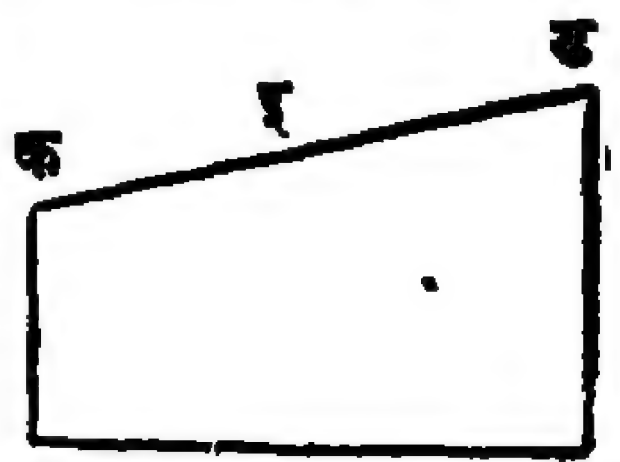
અંતર ઓછું થતું જાય છે,” અને “ કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હતું તેટલુંજ રહે છે,” એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાળુએ અંતર ઓછું છે તે બાળુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “હા.” સામી બાળુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? “હા.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાળુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? “ના.” ડાબી બાળુએ વધારી હોય તો? “ના.” આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

સમાંતર (સમ+અંતર)=જેમની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોય છે તે.

જેમની બે બાળુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

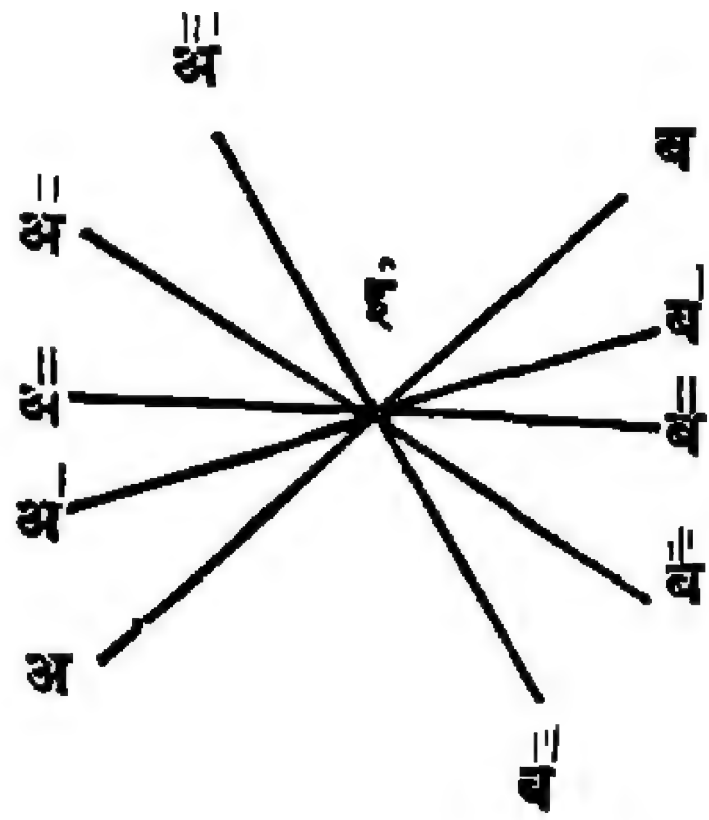
સમાંતર લીટીઓ વિષેની કટપનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

એક સીધી અથવા સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી કેટલેક અંતરે બીજી એક સીધી કાઢ સળી ફેં સ્થળે ખોસેલી ટાંકણીથી પાટીઆ સાથે જડી દીધી છે. આ સળીને પહેલાં ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો. આ સ્થિતિમાં ક ને ક છેડાનું અથવા છેડાઓથી અંતર માપો. કાઢનો જે છેડો અથવા અ વધારે આધો હોય, તે છેડાને અથવા પાસે બાંધી જાઓ, અને તે છેડે અથવા પાસે બાંધી જતી વખતે, બીજા છેડાનું અથવા જે અંતર હોય તેમાં શો ફેરફાર થાય છે, તે જુઓ. “પહેલાં જે છેડો આધો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ



બીજા છેડાનું અંતર વધતું જાય છે.” એ પ્રમાણે ફેરફાર થતાં થતાં કોઈ પણ વખતે અવથી ક અને ઢ છેડાનું અંતર સરખું થાય છે કે ? “થાય છે.” એવી સ્થિતિમાં બે લીટીઓ હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે બંધે દેકાણે સરખું અંતર હોય છે માટે એવી સ્થિતિમાં તેમને સમાંતર કહે છે.

પામેની આકૃતિમાં અવ લીટી ફરે છે ત્યારે તે જુદી જુદી સ્થિતિમાં આવે છે, તે સ્થિતિ અવ, અવ, અવ, એ લીટીઓ દર્શાવે છે. અવ, લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે એક અમર્યાદ કહી લીટીને છેદે. અવ એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે કહ-



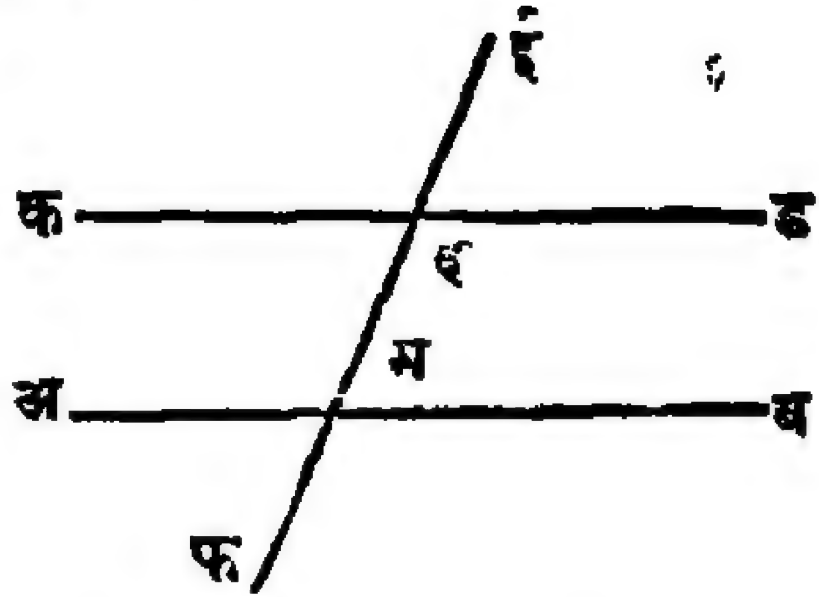
ક ————— ડ

ને છેદે...અવ લીટી એવી છે કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે કહને છેદે નહિ, પરંતુ તેને જમણી બાજુએ વધારી હોય, તો કહને છેદે. અવ લીટી એવી છે કે તે...વગેરે.

ઉપરના પ્રયોગ પરથી એમ જણાય છે, કે અવ લીટી ફેરવી આસપાસ ફરવામાં અમુક હદમાં હોય ત્યાંસુધીજ, ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો કહને છેદે છે. તે હદની બહાર જાય ત્યારે, તે લીટીને જમણી તરફ વધારી હોય તો કહને છેદે છે. આ બે હદની વચ્ચે એવી એક સ્થિતિ હોવી જોઈએ, કે તે સ્થિતિમાં તે લીટીને ગમે તે દિશામાં વધારી હોય તોપણ તે કહને મળે નહિ. એવી સ્થિતિમાં બે લીટી હોય તો તેમને સમાંતર લીટીઓ કહે છે.

કેટલાક ખુણાનાં નામ.

અવ, કઢ લીટીઓને ફફ લીટી મ અને હ બિંદુમાં છેદે છે. ફફ લીટી વડે અવ, કઢ લીટીઓની સાથે બે ખુણા થાય છે, તેમને નીચે પ્રમાણે નામ આપ્યાં છે:—



\angle કહમ અને \angle હમવને વ્યુત્ક્રમ (વિરુદ્ધ બાજુએ હોય એવા) ખુણા કહે છે.

\angle કહમ અને \angle હમઅને વ્યુત્ક્રમ ખુણા કહે છે.

\angle ફફક, \angle ફફહ, \angle ફમઅ, અને \angle ફમવને બહારના ખુણા કહે છે (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની બાજુના ખુણા છે.)

\angle ફફહ, \angle હમવને સંગત ખુણા કહે છે.

\angle ફફક, \angle હમઅને „ „ „

\angle કહમ, \angle હમઅ, \angle કહમ, \angle હમવને અંદરના ખુણા કહે છે; કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની બાજુના ખુણા છે. એમાંથી \angle કહમ અને \angle હમઅ એ ફફની એકજ બાજુએ છે, તેથી તેમને એકજ બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે. તેમજ \angle કહમ અને \angle હમવ એ ફફની એકજ બાજુએ છે; તેથી તેમને પણ એક બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.

તમારી એક્સસર્સિઝ ખુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી જુદી ચાર જોડો લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે (વ્યુત્ક્રમ ખુણાની જોડમાંના એક ખુણાને બીજા સાથે) સરખાવો. તેમને શું જણાય છે ?

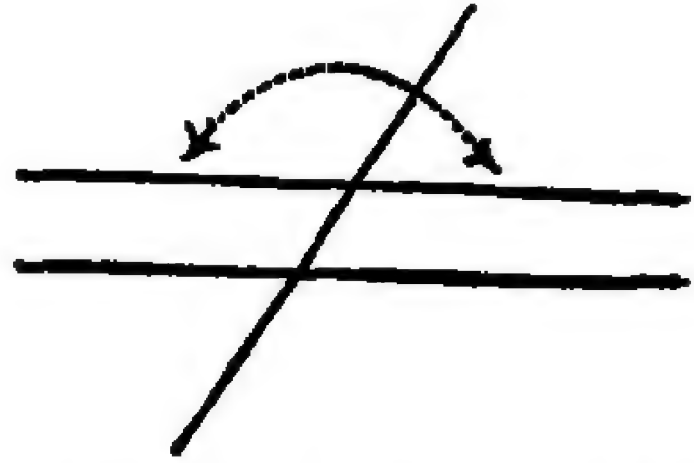
વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકે. શું દેખાય છે ? “તે સરખા છે.”

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે ? “ના.”

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ?

તમારી એકસરસાંધઝ ખુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ.

લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી બાજુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી



કાઢો. આ ભાગ અર્ધા વર્તુલ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજી બાજુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે તે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિશે તમે શું શીખ્યા ?

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે ? “સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. [અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી.”

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલાક કાટખુણા બરાબર થાય છે ? બીજી બાજુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે ? “બે કાટખુણા.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાજુ તરફ ઝોલું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાજુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે ? બે કાટખુણાથી ઝોલો કે વતો ? “ઝોલો.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઝોલો થાય છે કે વધારે ? “વધારે.”

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે ?

“જો એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છેદે, તો—

- (૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે;
- (૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;
- (૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.”

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—નીચેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને આ પ્રકરણ પુરું થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ મમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજાને મળતી નથી, તે સમાંતર લીટીઓ કહેવાય છે.

‘એકજ સપાટીમાં હોઈ’ આ સજ્જો સા માટે વાપર્યા છે ? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે

* ‘સપાટી’ સજ્જનો અર્થ બાજબ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણુત્તર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોધી દર્શાવતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીજકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે ?
 “ના.” આ ઉપરથી ‘એકજ સપાટીમાં’ એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે ?

એ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો જે 100° નો હોય તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

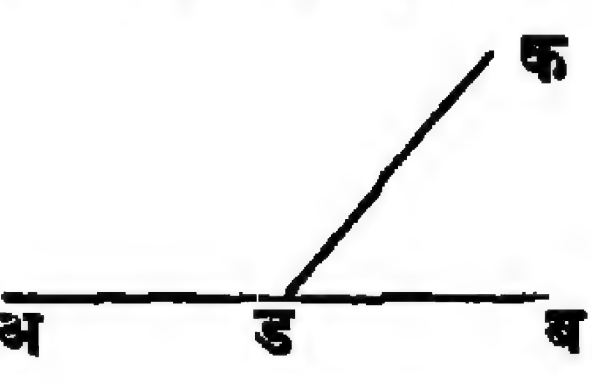
અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 10° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 50° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે 180° નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે ? ધારો કે અવ લીટીને સમાંતર લીટી ક બિંદુમાંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશો ? અ



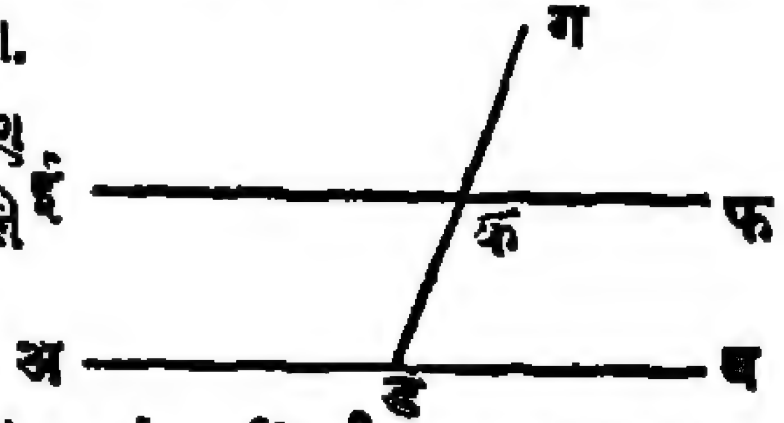
કમાંથી અવ લીટીને ગમે તે એક હ બિંદુમાં મળનારી એક કહ લીટી દોરો. કહવ ખુણા માપો. કોઈ એક લીટી ક પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી અવને સમાંતર થાય ? “ \angle કહવ જેટલો.” કહની કોઈ બાજુએ ? “ \angle કહવથી વિરુદ્ધ બાજુએ.”

ઉપલા પ્રશ્નમાં કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો કરી જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો

હોય ? તે ખુણે દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય ? અથવા લીટી અને ક બિંદુ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક અથવા લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક ક બિંદુ લો. અથવા ગમે તે હ બિંદુ લો.

કહ સાંધો. પછી નીચેના ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી આકૃતિ દોરીને કરો:—



(૧) \angle કહઅ જેવડો \angle હકફ લઈને ફક્ક લીટી દોરો.

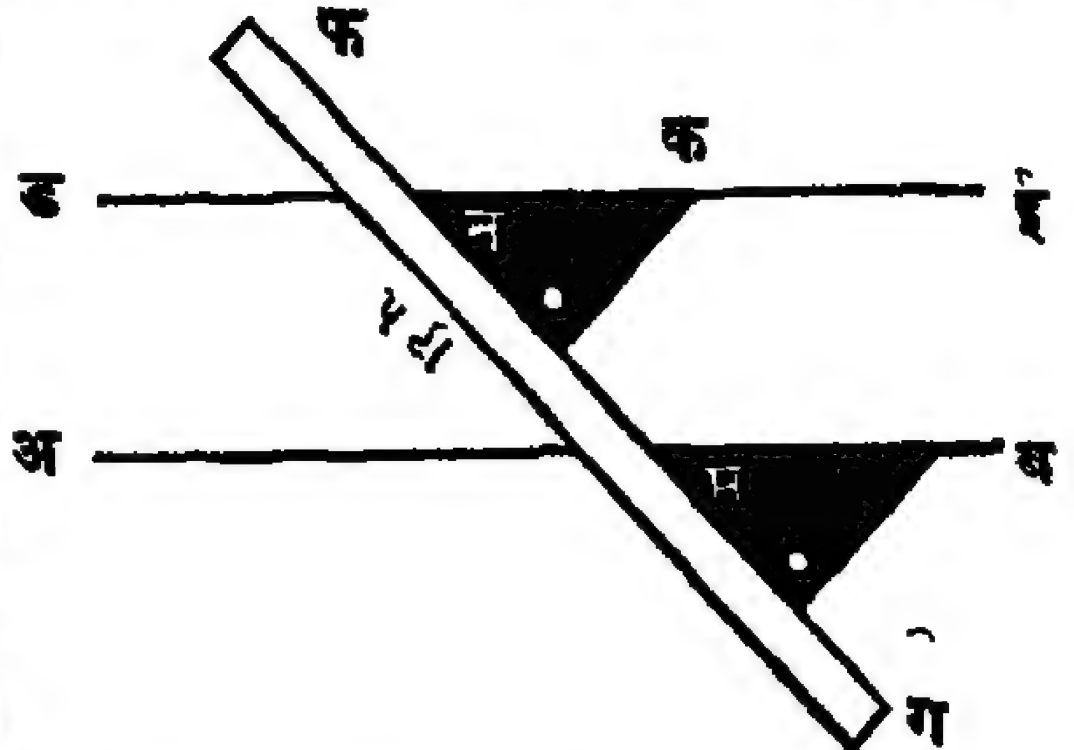
(૨) \angle કહઅના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો \angle હકફ દોરો, અને ફક્કને ફ સુધી વધારો.

(૩) હકને ક તરફ ગ સુધી વધારો. \angle કહઅ બરાબર \angle ગકફ કરો, અને ફક્કને ફ સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં બૃહત્તમ ખુણા બરાબર છે, અને ફક્ક, અથવા સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—અથવા લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કણ બરાબર પડે એવી રીતે તે

ત્રિકોણમાપ મૂકવું.
ત્રિકોણમાપની બીજી બાજુને (એટલે કે કાટખુણે કરનારી એ બાજુમાંથી એક બાજુને) આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે



પટ્ટી લગાડવી. પછી પટ્ટીને ઘાબી રાખીને પટ્ટીની કોરે કોરે ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું. ક બિંદુ પર ત્રિકોણમાપનો

કર્ણુ આગ્યો, કે કર્ણુની કારે કારે ક જિંદુમાં થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

ધારો કે એવી રીતે ઢાંચે લીટી ક જિંદુમાં થઈને જાય એમ અબને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. અથ, ઢકાઈ, એ લીટીઓને છેદનારી કાટ લીટીથી થનારા ન અને મ સંગત ખુણા સરખા છે; ઢકાઈ લીટી અબને સમાંતર છે.

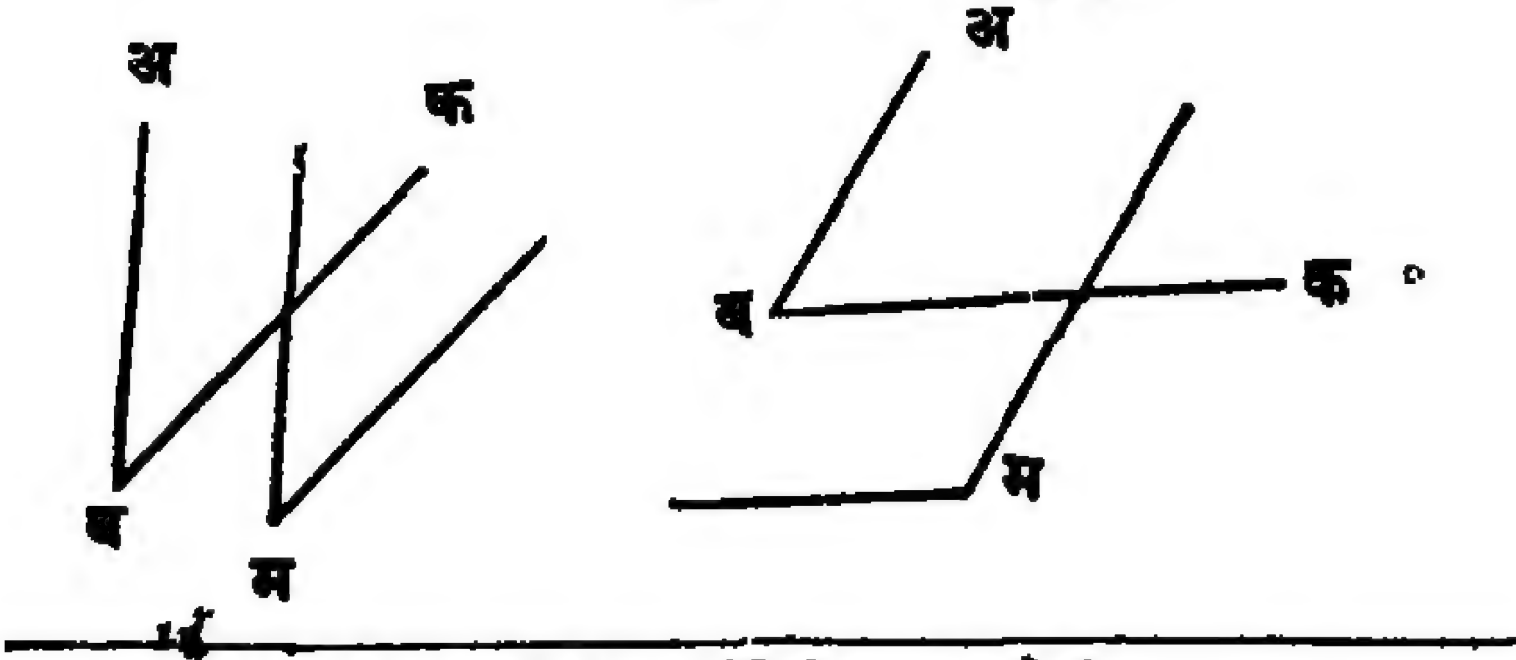
એક અથ લીટી લો. અબને સમાંતર કાટ લીટી દોરો. કાટને સમાંતર ફેફ લીટી દોરો. ફેફ, અબને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી જ એ લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શા નિયમ જણાઈ આવે છે ? “તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.”

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીત:—

જે દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજા મૂકીને તેની લગભગ લીટી દોરવી. (એક આપેક્ષી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી પટ્ટી કે બીજું ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટ્ટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કારે કારે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમ ત્યાં ચાર પાંચ જિંદુ લો, અને તે જિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજેવાળા ખુણા.



† કાટખુણો કરનારી બે લીટીઓને ભુજ કહે છે.

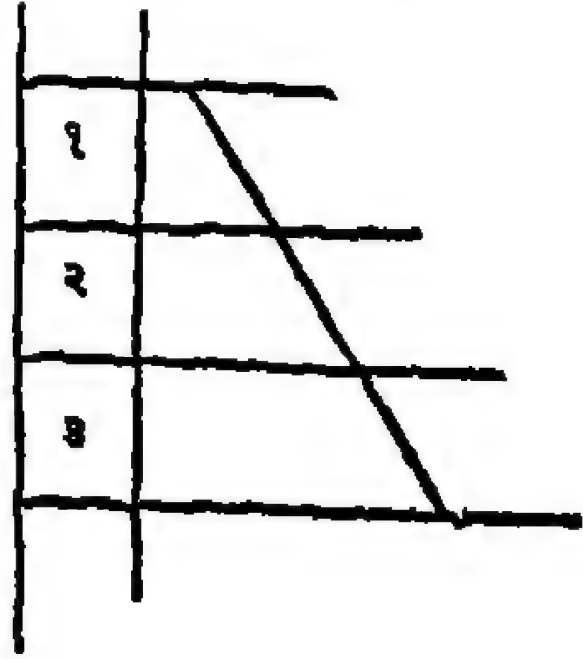
એક અલ્પક ખુણો લો. ગમે તે એક મ મિંદુ લો. મમાંથી
લઘુ, લઘુને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણો
માપો. તેને \angle અલ્પક સાથે સરખાવો. તે \angle અલ્પક જેવડો ન હોય
તો તેને \angle અલ્પકમાં ઉમેરો અને બેનો સરવાળો કટલો થાય છે તે જુઓ.

આ ઉપરથી કોઈ ખુણો અને તેના બુજોને સમાંતર હોય એવી
લીટીઓ વચ્ચેના ખુણો એ બેની વચ્ચેના સંબંધ વિષે શો નિયમ
જણાઈ આવે છે? “આ ખુણા સરખા હોય છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક
હોય છે.” (ખુણા ક્યારે સરખા હોય છે અને ક્યારે ન્યૂનતાપૂરક હોય
છે એનો ખુલાસો આગળ ૬૬ પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.)

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

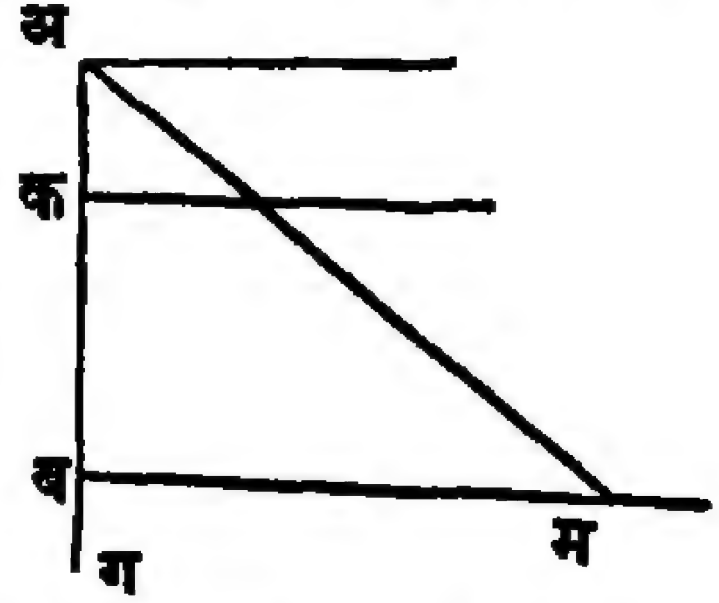
એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર મિંદુઓ
લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ બધી
સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ લીટીઓ દોરો. આ
લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર લીટીઓને લીધે, જે બે કે
ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ
આવે છે? “ગાળાઓ સરખા

છે.” એવીજ રીતે બીજી લીટીના
ગાળાઓ સરખાવીને શું જણાય
છે તે જુઓ. “ગાળાઓ સરખા
છે.” ત્રીજી અને ચોથી લીટી
માટે એવાજ પ્રયોગ કરો. (૫૦.)
આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ



આવે છે? “જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને
છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર
લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા
હોય છે.”

અગ અને અમ લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો. અગ લીટીમાં અથી થોડે અંતરે ક જિંદુ લો; ત્યાંથી અકથી જમણે અંતરે ઘ જિંદુ લો; અ, ક, ઘ, જિંદુમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે અમના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? ઉપરી આકૃતિમાં સમાંતર લીટીઓને હેઠનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે?

અગ લીટીમાં કઘ અંતર અકથી ત્રણગણું લો, અને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે? “સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે.”

એક્સસર્સાઇઝ બુકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર મિલિમીટરમાં કાઢો.

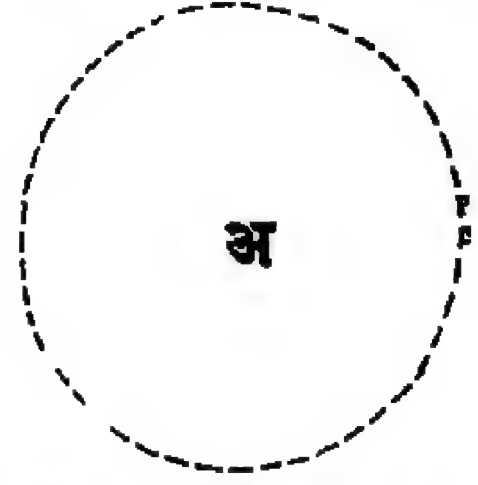
બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ છે કે? “હા,” આ ઉપરથી શું સમજાય છે? “બે સમાંતર

લીટી પૈકી એક લીટી પર લંબ હોય એવી લીટી બીજી લીટી પર પણ લંબ હોય છે.”

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની બે અણી વચ્ચે એક કુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક બિંદુ લઈને તેને આ નામ આપવું. આ બિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? “એક કુટ.” પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (બંને અણીઓની વચ્ચેનું



અંતર તેનું તેજ રાખીને ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? “એક કુટ.” એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાંની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાંનું અંતર અથી સરખુંજ છે (એટલે એક કુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવવો. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પુરું કરવું. (વર્તુળના પરિધ પરનું એકાદ બિંદુ બતાવીને) “આનું અથી અંતર કેટલું છે?” “એક કુટ.” (પરિધ પરનું બીજું કોઈ બિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અથી કેટલું છે? “એક કુટ.” આ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુનું અંતર અથી એક કુટ છે એ વાત પરથી વર્તુળના પરિધ પરનાં બિંદુ અને મધ્યબિંદુ વચ્ચેનાં અંતર વિશે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે? “પરિધ પરનાં સર્વ બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે.” તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક કુટ અંતરે હોય એવું) બિંદુ પરિધની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે? “ના.”

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાજુ પર કંઈ નિશાની કરીને તે આંકણીની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટ્ટી પર ફેરવો અને ફુટપટ્ટી પરનું અંતર માપો. પછી તે આંકણીનો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

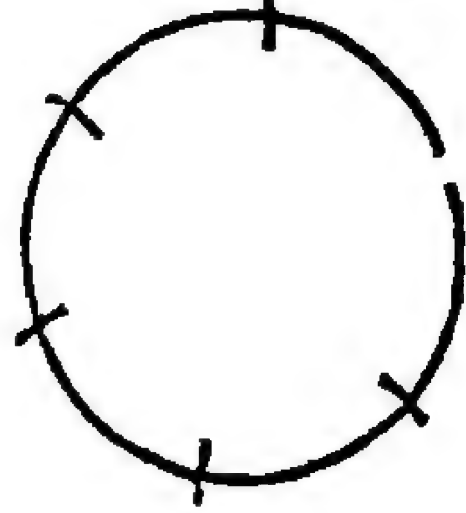
જે ઇંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

૩.૫", ૭" વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપરોક્ત પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે ? ‘ઉત્તરણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭ : ૨૨ હોય છે.’

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર અ,બ,ક,ઢ,ઈ,ફ,ગ,...એ બિંદુઓ ધણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. અ આગળ શરૂ કરીને ફરીથી અ સુધી આવી પહોંચે ત્યાંલગી ટાંકણીઓની આસપાસ દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે ? ‘સવાઈગણી છે.’

ઉપરોક્ત પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે અબ અંતર જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો અબ કૌંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ધણી બાજુવાળી આકૃતિની બાજુઓ જે ધણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિતિ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિધ પર મૂકીને પરિધના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થયા ? “ છ. ”



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં ખીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય ? “ છ. ”

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨.૫" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ. મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

અ સ્થળે રાખેલી તોપનો ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૧ માઇલ=૧".)

બે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપનો મારો ૭ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૫ મિ. મી.=૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જો નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આધું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ-૧ મિ. મી.=૧ ફુટ.)

* પરિધ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

એક ખીખથી ૧.૫" અંતરે અ અને ઘ બિંદુઓ લો. અથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવો. (આ લીટી, ૧.૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) ઘથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવો. અ ને ઘ, એ બંને બિંદુથી ૧.૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે? "એ." તેમને ક ને ઢ કહો. તેમને અ, ઘ સાથે સાંધો. અઘ, ઘક, કઅ અને અઘ, ઘઢ, ઢઅ લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે?

અ ને ઘ એ બે બિંદુઓ એક ખીખથી ૧.૭" આધાં છે. અથી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવો. ઘથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. અથી ૨" અને ઘથી ૧.૫" આધું કયું બિંદુ છે? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે? "એ." તેમને ક ને ઢ કહો. અક અને ઘકની લંબાઈ કેટલી છે? તેમજ અઢ અને ઘઢની લંબાઈ કેટલી છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે? કેટલા ખુણા?

અ, ઘ બિંદુઓ એક ખીખથી ૧.૨" અંતરે છે. અથી ૨" અને ઘથી ૧.૬" અંતરે હોય એવું ક બિંદુ શોધી કાઢો. અઘ, ઘક, અક, એ બિંદુઓ સાંધો. અઘ, ઘક, કઅની લંબાઈ કેટલી? અઘક એ કઈ આકૃતિ છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની અઘ, ઘક, અક બાજુઓની લંબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના અઘક અને અઘઢ ત્રિકોણમાં કંઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે?

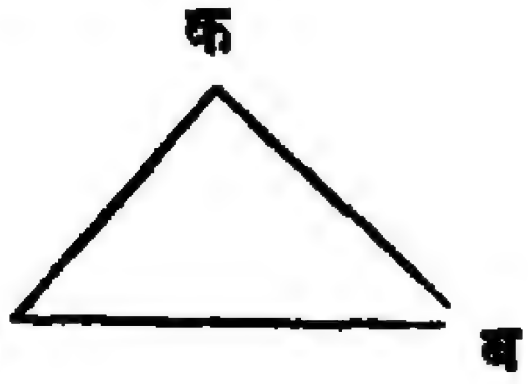
નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

અઘ	૧.૪"	ઘક	૨"	કઅ	૨.૫";
"	૨.૧"	"	૧.૯"	"	૩.૨";

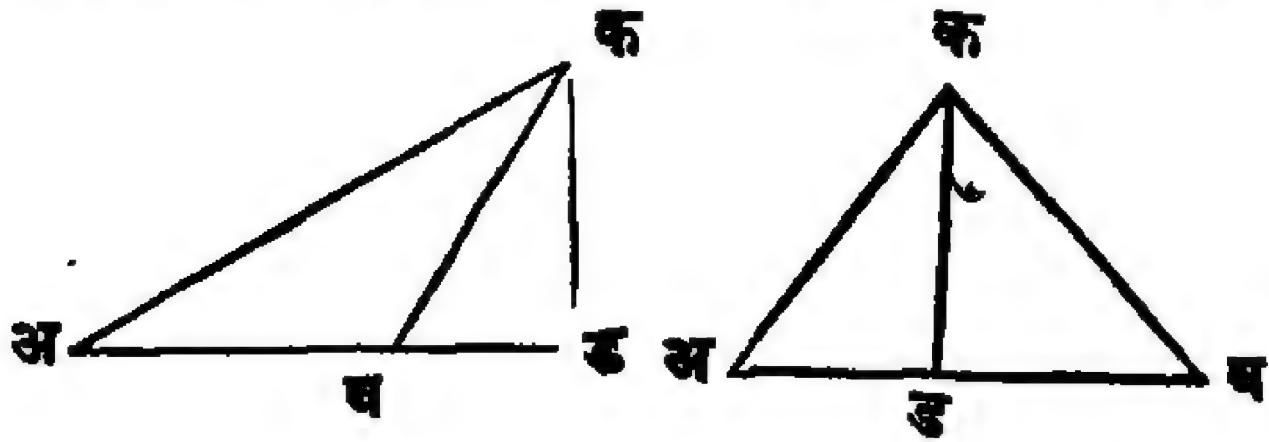
અબ	૪.૧"	બક	૪.૨"	કઅ	૪.૩"
"	૪૧ મિ. મી.	"	૪૨ મિ. મી.	"	૪૩ મિ. મી.
"	૩૨ "	"	૧૮ "	"	૨૦ "
"	૬૯ "	"	૧૧૪ "	"	૫૮ "

(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

ત્રિકોણુ જે બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો પાયો કહેવાય છે. અથવા ત્રિકોણુ અથવા બાજુ પર છે એમ ધાર્યું હોય, તો અથ તેનો પાયો થાય; પણ તે બક પર ઉભો છે એમ ધાર્યું હોય તો બક તેનો પાયો થાય.



ત્રિકોણુના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે. ત્રિકોણુના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની ઉંચાઈ કહે



છે. પાસેના ત્રિકોણુમાં કહ, અથવા ત્રિકોણુની ઉંચાઈ છે.

ત્રિકોણુની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણુના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે ?

- “(૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
- (૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
- “(૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા.”

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણુ હોઈ શકે ?

એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે ?)

જે ત્રિકોણુની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ ત્રિકોણુ કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે. દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને વિષમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ પ્રથમ વિભાજક અને પટ્ટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

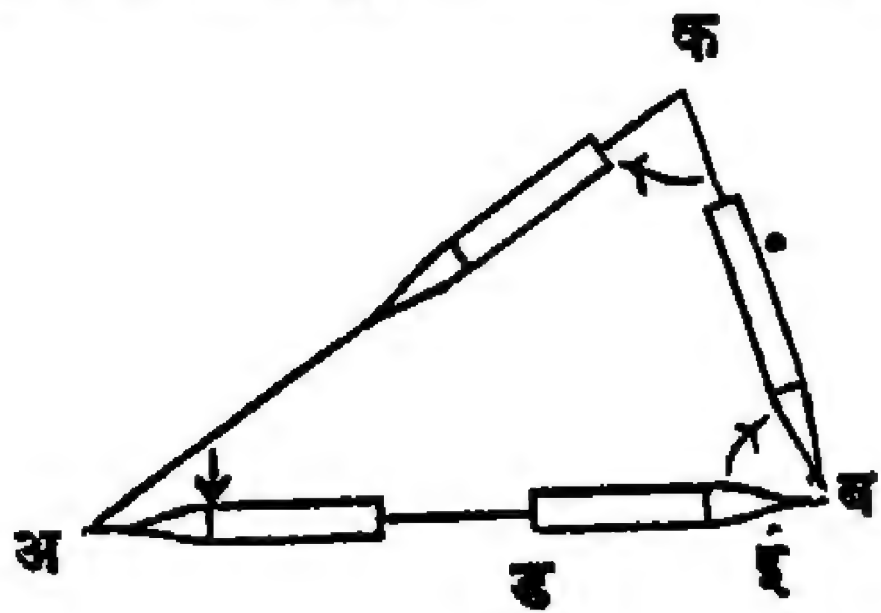
ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક બીજાની લગોલગ મૂકો, તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો.

અથવા એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. હવે એક પેન્સિલ છે, અને તેની ઈ અણી ત્રણ તરફ છે. આ પેન્સિલને અથવા બાજુમાં ત્રણ સુધી ખસેડો. તે બિંદુ આગળ હાથેડાને અથવા ખુણા જેટલો ફેરવીને ઈ હ, થક પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને



ક તરફ ખસેડો; અને જ છેડો કને અડકે, એટલે હૈં છેડાને વક્ર અ ખુણા નેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને અ તરફ ખસેડો; અને હૈં છેડો અને અડકે, એટલે જ છેડાને કઅબ ખુણા નેટલો ફેરવો. પેન્સિલને અબ લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમ સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની હૈં અણી કઈ દિશામાં છે? “અ તરફ.” પહેલાં કઈ દિશામાં હતી? “જ તરફ.” આ પરથી હૈં અણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. અણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી જઈ પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. “તે બે કાટખુણામાં થઈને ફરી છે.” અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

જે ત્રિકોણના બે ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જે ત્રિકોણના બન્ને ખુણા સરખા હોય, અને જેમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ?:—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણના બે સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જેના સઘળા ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

નીચે આપેલા અંકના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે ?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°. (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°. (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જે ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા ન હોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેને ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સ્ટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓના ત્રિકોણ બનશે કે ?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળો ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બામુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે ?

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કહ્યું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહો:—

પહોળો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧) કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨) કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩) સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪) પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫) પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬) પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે ? “એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી”; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને પહોળાખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાનું જોઈએ ? “એ.”

હવે કેવા ત્રિકોણને સાંકડાપુણુ ત્રિકોણ કહેવો જોઈએ? કોઈ પુણુ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા પુણુ હોવા જોઈએ, એમ ઉપર કહ્યું છે; ત્યારે જે ત્રિકોણમાં બેજ પુણુ સાંકડા પુણુ હોય, તેને સાંકડાપુણુ ત્રિકોણ કહીએ તો ચાલે કે? એમ કહેવામાં શી ભૂલ થશે? ઉપર કહેલા ત્રિકોણના વર્ગોમાંથી કયા વર્ગના ત્રિકોણનો એ નામમાં ખોટી રીતે સમાવેશ થશે? જે ત્રિકોણને કાટપુણુ ત્રિકોણ અથવા પહોળાપુણુ ત્રિકોણ એ બેમાંથી એકે નામ ન અપાતાં ફક્ત સાંકડાપુણુ ત્રિકોણ એજ નામ આપી શકાય, એવા ત્રિકોણમાં સાંકડા પુણુ કેટલા હોવા જોઈએ? “ત્રણ.” આ પરથી સાંકડાપુણુ ત્રિકોણની વ્યાખ્યા તમે શી આપશો?

(૩) જે ત્રિકોણના ત્રણે પુણુ સાંકડા હોય છે, તેને સાંકડાપુણુ ત્રિકોણ કહે છે.

૬૬મા અને ૬૭મા પાના પર આપેલા ત્રિકોણ જુઓ, અને તે પૈકી દરેક ત્રિકોણ, ઉપર કહેલા ત્રણ પ્રકાર પૈકી કયા પ્રકારનો છે તે કહો.

એક કાટપુણુ ત્રિકોણનો એક પુણુ નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો બાકીના પુણુ કેવડા હોય તે કહો:—

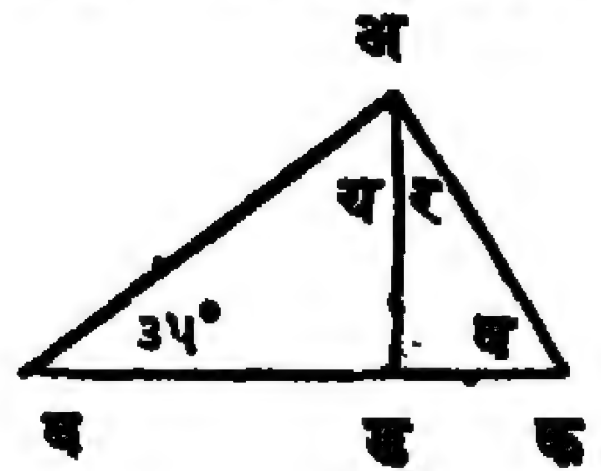
૪૦°, ૫૦°, ૬૩°, ૧૭°, ૫૮°, ૨૬°, ૩૯°, વગેરે.

ઉપજા પ્રશ્ન પરથી, કાટપુણુ ત્રિકોણના સાંકડા પુણુના સરવાળાના સંબંધમાં કયો નિયમ સમજાય છે? તેમનો સરવાળો એક કાટપુણુ થાય છે, એટલે કાટપુણુ ત્રિકોણમાંના સાંકડા પુણુ એક બીજના કાટપુણુ હોય છે.”

પામેના અઘક ત્રિકોણમાં \angle અઘક = ૯૦° અને અઘ, ઘક પર લંબ છે. એ \angle અ = ૩૫° હોય

તો \angle અ. \angle ર. \angle ઘ, કેવડા હોવા

જોઈએ?



ઉપલા પ્રશ્નમાં \angle ઘ નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને
 \angle ઘ, \angle ર, \angle ઘ ખુણા કાઢો:—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

ત્રિકોણના બહારના ખુણા.

એક અથવા ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે ઘક ને ઘ સુધી વધારો. અથવા ખુણાને અથવા ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી હોય, તો છ બહારના ખુણા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા બબ્બે ખુણા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ બેડમાંના ગમે તે એક ખુણાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો ખુણો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના ખુણા એટલે કયા ખુણા સમજવા એ વિષે શક ન પડે, એટલા માટે ત્રિકોણના બહારના ખુણા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છે:—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકબીજા ક્રમે વધારી હોય, તો તે બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુણાઓને તે ત્રિકોણના બહારના ખુણા કહે છે. દાખલા તરીકે, ૭૪મા પાના ઉપરની આકૃતિમાં અકર્ષ, અઘક, અને કઘગ, એ અથવા ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે.

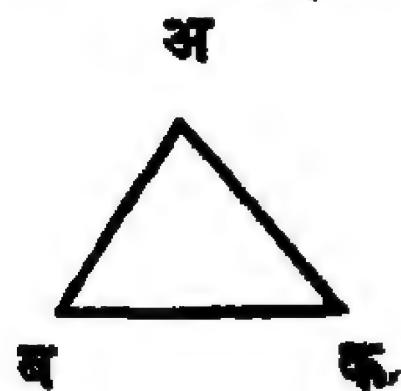
ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? “ત્રીજો ખુણો.”

પાસેની આકૃતિમાં (\angle અઘક + \angle અકઘ)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? (\angle અકઘ + \angle કઘઅ)નો

ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો?

\angle કઘઅના ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયા?

\angle અઘકના કયા? \angle અકઘના કયા?



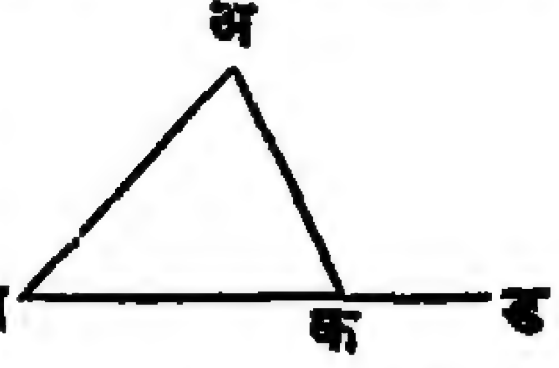
ગમે તે એક અથવા ત્રિકોણ દોરો. ચક્ર બાજુને ઢ સુધી લંબાવો.

\angle અકચ+ \angle અકઢ=૨ કાટખુણા, તો

\angle અકચનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ?

“ \angle અકઢ.” આગલા પ્રયોગ પરથી

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા



\angle અકચના ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે ? “ \angle કચઅ + \angle ચઅક.” આ પરથી \angle કચઅ, \angle ચઅક એમનો સરવાળો અને \angle અકઢ, એ બેની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

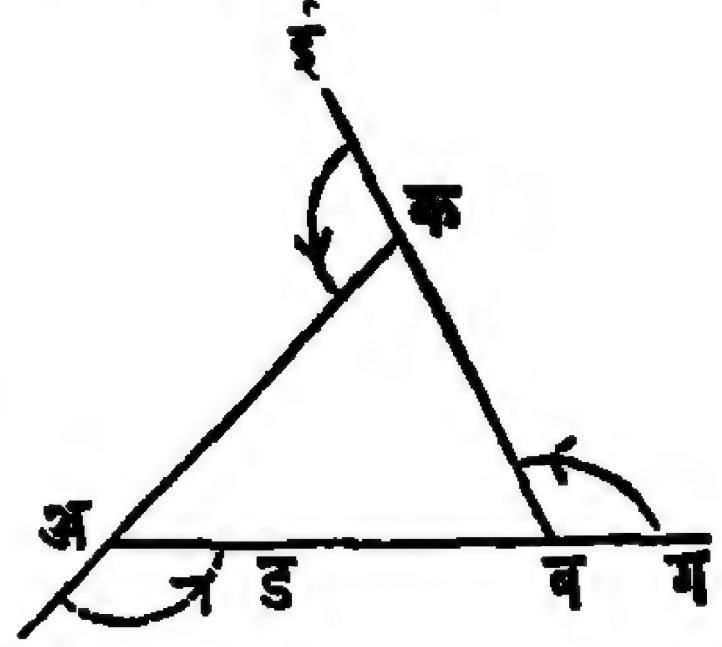
“ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સરવાળા બરાબર હોય છે.”

ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ એક તરફથી વધારી હોય, તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર.”

ત્રિકોણમાંનો દરેક ખુણો અને તેની પાસેનો બહારનો ખુણો એ બેનો સરવાળો કેટલો છે ? “બે કાટખુણા.” એ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના બહારના ત્રણ ખુણા, એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “છ.” ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિશે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો ? “એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ.”

ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો. ધારો કે અબ,બક,અક, એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. હ રથળથી એક ગાડી બ તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી બ પાસે આવશે, એટલે બક રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોઢું ટપકાંથી દેખાડેલા બ ખુણા જોટલું ફેરવવું પડશે. ગાડી ક પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા ક ખુણા જોટલું તેને પોતાનું મોઢું ફેરવવું પડશે. ગાડી કઅ રસ્તે અ પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા અ ખુણા જોટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે હ બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.



ધારો કે અબ લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું, તે બ પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું. તે ક પાસે ગઈ ત્યારે.....વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મોં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મોં જો ખુણામાં ફર્યું, તે ખુણા તો અબક ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે. અબક ત્રિકોણ ગમે તે પ્રકારનો લીધો હોય, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકોણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

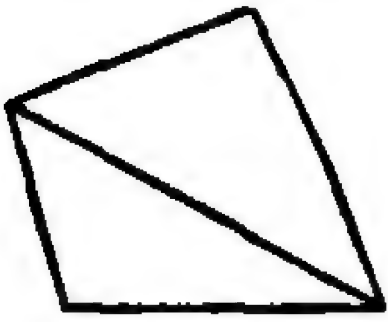
બહુકોણાકૃતિના બહારના ખુણાનો સરવાળો.

વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાઈ હોય એવી કોઈ પણ આકૃતિને બહુકોણાકૃતિ કહે છે.

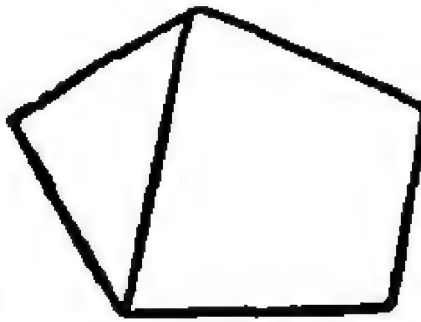
ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ બંધાઈ હોય એવી આકૃતિને ચતુષ્કોણ કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને પંચકોણ કહે છે.

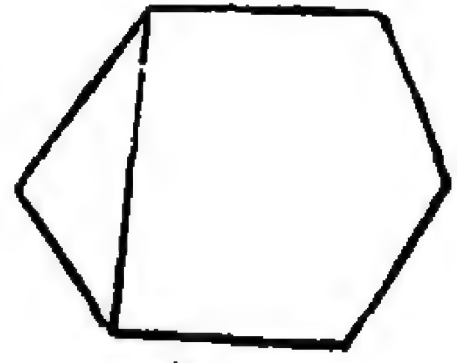
છ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને ષટ્કોણ કહે છે.



ચતુષ્કોણ.



પંચકોણ.



ષટ્કોણ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને સપ્તકોણ કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને અષ્ટકોણ કહે છે.

અમે તેવો એક ચતુષ્કોણ લો. તેની બધી બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર”.

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, અષ્ટકોણ, વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે. એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે ? “આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

૭૪મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે? “બે કાટખુણા.” એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? “આકૃતિને નેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર.” તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે શાનો સરવાળો આવ્યો? “અંદરના ખુણાઓનો.” તે કેટલો છે? “ચાર કાટખુણા.”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો.
પંચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(5 \times 2 = 10; 10 - 4 = 6)$$

ષટ્કોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(6 \times 2 = 12; 12 - 4 = 8)$$

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો?

$$(7 \times 2 = 14; 14 - 4 = 10).$$

પંદર બાજુવાળા આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.....
.....વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે? “બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા.”

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની બીજી રીત—

કોઈ પણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ=૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨ + ૨ કાટખુણા = ૪ કાટખુણા.

પંચકોણ=ત્રિકોણ+ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો=૨+૪ કાટખુણા= ૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ=ત્રિકોણ+પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૬ કાટખુણા =૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ=ત્રિકોણ+ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૮ કાટખુણા =૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા ફેરવી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (ક્ષ બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક અ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિના શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે ક્ષ) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો = ક્ષ × ૨ કાટખુણા. તેમાંથી અ બિંદુ પાસેના ખુણા = ૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો = (ક્ષ × ૨) - ૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

અવકાશ ચતુષ્કોણના \angle અ, \angle બ, \angle ક, અનુક્રમે
 $\begin{matrix} 80^\circ, & 40^\circ, & 100^\circ; \\ 100^\circ, & 40^\circ, & 110^\circ; \\ \text{તથા } 120^\circ, 100^\circ, & 120^\circ; \end{matrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{અંશના છે, તો } \angle \text{ ઢ કેટલા અંશનો ?} \end{array} \right.$

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા 100° અને 80° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે ૫૩° અને $૨૭^\circ, ૯૦^\circ$ અને $૮૦^\circ, ૧૧૦^\circ$ અને ૨૮° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિતપંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે ?

નિયમિત પટ્ટકોણનો કેવડો ? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો ?

નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો ?

નિયમિત પંચકોણ, પટ્ટકોણ, અષ્ટકોણ, અને દસકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો ૧૬૦° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો કેવડો છે ?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અર્ધો છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ ?

અઘકઢઈફ પટ્ટકોણમાંના અ, ક, અને ફ ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો દરેક ખુણો ઘ, ઢ કે ફ ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ ઘ, ઢ, અને ફ એક ખીજની બરાબર છે); તો અ ખુણો કેવડો છે ?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો ૧૪૪° કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિની બાજુઓ કેટલી ? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરની છે એ વિશે.)

અઘ અને ઢઈ બે સરખી લીટીઓ લો. અઘના ઘ મિદુ પાસે ગમે તેટલો મોટો \angle અઘક કરો. \angle ઢઈફ, \angle અઘક જેવડો

† જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને નિયમિત આકૃતિ કહે છે.

*એકરૂપ એટલે બધી બાજુતમાં સરખા. બધી બાજુઓ એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને ક્ષેત્રફળ.

કરો. ઘક ગમે તેટલી લાંબી લો. તેટલીજ લાંબી ફેફ લો. કઝ, ફઢ સાંધો. અઘ, ઢફ પર અને ઘક, ફેફ પર પડે એવી રીતે અઘક ત્રિકોણ ઢફ ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” (પુ). આ પરથી ત્રિકોણની એકરૂપતા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

અઘ નેવડી ઢફ લીટી લો. \angle અઘક, \angle ઘક ગમે તેટલા મોટા ખુણા લઈને અઘક ત્રિકોણ પુરો કરો. \angle અઘક, \angle ઘક નેવડા અનુક્રમે \angle ઢફ, \angle ફઢફ કરો. અઘ, ઢફ પર અને ઘક, ફેફ પર પડે એવી રીતે અઘક ત્રિકોણ ઢફ ત્રિકોણ પર મૂકો. (પુ). તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા ?

“એક ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

એક ગમે તેવો અઘક ત્રિકોણ દોરો. ઢફ બાજુ અઘ નેવડી દોરો. ઢફ ખુણો અઘક ખુણા નેવડો કરો. અઘક ખુણા નેવડો કાઢીને કકડો કાપી કાઢો. આ ખુણો ફેફને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે ફેફની સાથે \angle અઘક નેવડો ખુણો કરે. એ લીટી ઢમાં થઈને જશે. એવી રીતે ઢફ ત્રિકોણ દોર્યા પછી અઘ, ઢફ પર અને ઘક, ફેફ પર પડે એવી રીતે અઘક ત્રિકોણ ઢફ ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે ? “છે.” (પુ). આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા ?

“એક ત્રિકોણના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના તેમને મળતા ભાગોની

(એટલે બીજના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના બે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજ ત્રિકોણનો બે ખુણો છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ઉપક્ષા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહ્યો. “ત્રણ.” ક્યા ત્રણ ? (૧) “બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા.”

**ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને
સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.**

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજ પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાળો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજ પર બરાબર આવી રહેશે. (પુઠ). આ ઉપરથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે ? “તે સરખા છે.” આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે ? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે.”

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે ? “દરેક ખુણો ૬૦°નો છે.

આ ઉપરથી સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ? “સમબાજુ ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો ૬૦°નો હોય છે.”

એક ગમે તેટલી લાંબી અથવા લીટી લો. \angle અથવા ગમે તેવડો સાંકડો ખુલ્લો લો. \angle અથવા જેવડો \angle અથવા કરો. અથવા અને અથવા માપો. આ પ્રયોગ ત્રણ ચાર વખત જુદી જુદી રીતે કરો. ત્રિકોણના બે સરખા ખુલ્લાઓની સામેની બાજુઓ કેવી હોય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે ?

“ત્રિકોણમાંના સરખા ખુલ્લાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.”

અથવા = ૨", \angle અથવા = ૬૦°, અને \angle અથવા = ૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અથવા, અથવા માપો. તેમની લંબાઈ અથવા સાથે સરખાવો. \angle અથવા કેવડો ? (પુ.) અથવા = ૧", \angle અથવા = ૬૦° અને \angle અથવા = ૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અથવા, અથવા માપો. તેમની લંબાઈને અથવા જોડે સરખાવો. \angle અથવા કેવડો છે ? આ ઉપરથી, જે ત્રિકોણના બે ખુલ્લા ૬૦, ૬૦ અંશના હોય છે, તે વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ? “તેના ત્રીજો ખુલ્લો ૬૦°નો હોય છે અને તેની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે.” સમબાજુ ત્રિકોણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. એમાંના દરેક ભાગ કાટખુલ્લુ ત્રિકોણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુલ્લા અનુક્રમે ૩૦° અને ૬૦°ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકોણોમાં ૩૦°ના ખુલ્લાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધા હોય છે.

(૧) અથવા = ૨", \angle અથવા = ૬૦°, \angle અથવા = ૬૦°

(૨) અથવા = ૪", \angle અથવા = ૬૦°, \angle અથવા = ૬૦°

(૩) અથવા = ૨.૫", \angle અથવા = ૬૦°, \angle અથવા = ૬૦°

લઈને ત્રિકોણ કરો. અથવા કેટલા ઈંચ છે ? અથવાની સાથે અથવા સરખાવો અને આ ઉપરથી કાટખુલ્લુ ત્રિકોણના સાંકડા ખુલ્લા ૬૦° અને ૩૦°ના હોય, તો ૬૦° અને ૩૦°ના ખુલ્લાની સામેની બાજુઓ શા પ્રમાણમાં હોય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજતો હોય તે કહો.

“જે કાટખુલ્લુ ત્રિકોણમાંનો એક સાંકડો ખુલ્લો ૩૦°નો હોય, તો તે ખુલ્લાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધા હોય છે.”

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુએ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરે આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજા પ પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાજુનું તફાવત કે અસમાનપણું છે કે ? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એ ત્રિકોણ કરો, તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરે આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, તે નીચેના ત્રિકોણ પર બરાબર આવી રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂક શકાય છે કે ? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણ સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ?

“એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

જેમાં \angle અઘક કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે અઘક કાટખુણ ત્રિકોણ લો. હર્ફ કાટખુણો દોરો. ફર્ફમાંથી ઘક બરાબર ફર્ફ ભાગ કાપી કાઢો. ગ મધ્યબિંદુ ધારીને કઝ ત્રિજ્યાએ વર્તુલ દોરો. ધારો કે તે ફર્ફને હ બિંદુમાં છેદે છે. ગહ સાંધો.

અઘક અને હર્ફગ આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે અઘ કર્ણ=હગ કર્ણ, અને ઘક = ફર્ફ બાજુ છે.

\angle અઘક, \angle ફર્ફગ માપો અને તેમને સરખાવો. \angle અઘક \angle હગર્ફ માપો અને તેમને સરખાવો. અઘ, હર્ફ માપો અને તેમ સરખાવો. સરખામણી પરથી શું જણાઈ આવે છે ?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા કાટખુણ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલેખ પ્રયોગ અનેક વાર કરો. આ ઉપરથી તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ?

“જો એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની અનુક્રમે

બરાબર હોય, તો બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટાપણાનો. તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના નાનામોટાપણા સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની સામેનો ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા પર મૂકી જુઓ, અને બેને સરખાવો. તમને કયો ખુણો મોટો જણાય છે ? “ મોટી બાજુની સામેનો. ” બીજો વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો. તેની નાની બાજુની સામેનો ખુણો કાણુમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો કાણુમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે ? (પુ.). ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ ઉપલા પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે ?

“ ત્રિકોણની બે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે મોટી હોય છે, તેની સામેનો ખુણો નાની બાજુની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે. ”

અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. \angle અबકથી મોટો \angle અક લો. અક, અક માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ખુણો ગમે તેવડો લો. \angle અક, \angle અबકથી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અક, અક માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? આ ઉપરથી તમને કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“ ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટો હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે. ”

	પહોળખુણ ત્રિકોણ.	સાંકડખુણ ત્રિકોણ.	કાટખુણ ત્રિકોણ.
સમબાજુ ત્રિકોણ.			
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ			
વિષમબાજુ ત્રિકોણ			

ઉપર ત્રિકોણના શુદ્ધ શુદ્ધ પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ ખાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં ‘ હા ’ એમ લખેા; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય, તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં “હોઈ શકે” એમ લખેા.

ત્રિકોણની એક બાજુનો, બીજી બાજુઓના સરવાળા
તથા બાદબાકી સાથેનો સંબંધ.

A horizontal number line with four vertical tick marks. Below each tick mark is a Devanagari character: 'क' (Ka), 'ख' (Kha), 'अ' (A), and 'ब' (Ba) from left to right.

એક અથ લીટી લો. તેને અ તરફ ફ સુધી લંબાવો. અક્ષમાં હ બિંદુ લો. અ મધ્યબિંદુ અને અહ ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. બ મધ્ય બિંદુ અને બઅ+અહ (=બહ) કરતાં મોટી (દાખલા તરીકે ચપ્પ) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે ? “ના.” શા માટે ? “ચપ્પ ત્રિજ્યા બઅ+અહ કરતાં વધારે છે તેથી.” આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હોય તો તેની ત્રિજ્યા ટેવડી લેવી જોઈએ ? “ચહ કરતાં નાની.” (પુ.). ચહ કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે વર્તુળ પહેલાને ગ બિંદુમાં છેદે છે. હવે ગ બિંદુ અ ને બ સાથે સાંધવાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તેમાં અથ તો પાયોજ છે, અને ગઅ, અહ

બરાબર છે, અને ગઘ, અઘ+ઝડના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલુમ પડશે કે જો ત્રીજી લીટી અઘ+ઝડના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તોજ બે વર્તુળો એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાજુઓવાળો ત્રિકોણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાજુઓના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાજુ મોટી હોય એવો ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શા નિયમ નીકળે છે ?

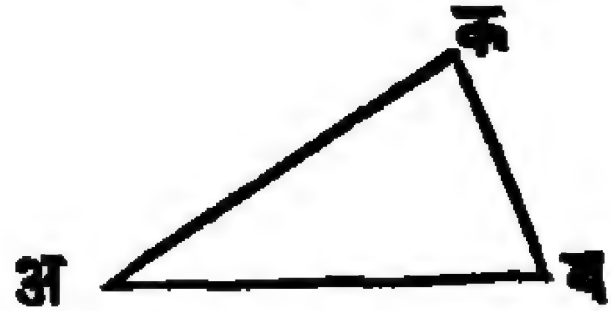
અઘ=૩", ઘઘ=૨", અને કઝ=૮" લઈને તમે ત્રિકોણ દોરી શકશો ? અઘ=૩", ઘઘ=૨", અને કઝ=૧" લઈને ત્રિકોણ દોરી શકશો કે ? "ના." શા માટે નહિ ? આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રિકોણ બની શકે એટલા માટે કઝની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હેવી જોઈએ ?

પાસેની આકૃતિમાં અ અને ઘ બિંદુઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે ? અથી ઘ સુધી અઘ સીધી લીટી દોરવાને બદલે અઘઘ જેવી વાંકી

લીટી દોરી હોય, તો તેની લંબાઈ અઘથી

વધારે થશે કે ઓછી ? " વધારે;

કારણ કે અઘઘ વાંકી છે. " ઘ અને



ક વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે ઘઘઘ જેવી લીટી દોરી હોય, તો તે ઘઘથી નાની થશે કે મોટી ? "મોટી; કારણ કે ઘઘ સીધી લીટી છે, અને ઘઘઘ વાંકી લીટી છે." એજ પ્રમાણે. ક અને અ વચ્ચે અંતર કેટલું છે ? કથી અ સુધી કઝ સીધી લીટી ન દોરતાં કઘઘ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ કઝથી વધારે થશે કે ઓછી ? "વધારે; કારણ કે કઘઘ વાંકી લીટી છે." ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાજુ અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુનો સરવાળો અને ત્રીજી બાજુ એમની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે.

"ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે."

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪" અને બીજી ૨" હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? “બે ઇંચ કરતાં વધારે.” શા માટે? “કેમકે બે ઇંચ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧૥ ઇંચ લઈએ, તો બે લીટીઓનો સરવાળો $૨+૧૬=૩૮$ એ ત્રીજી ૪ ઇંચ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી.” (પુ.૦). આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિષે શું સમજાય છે? “ત્રિકોણની કેઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે.”

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠અબક મને તેવડો લો. અબ જેટલી ઢાંઈ બાજુ લો. ઈ બિંદુ પાસે ∠ઢાંઈફ, ∠અબકથી નાનો કરો. ઈફ, બકની બરાબર કરો. ઢફ અને અક સાંધો. અક, ઢફ કરતાં નાની છે કે મોટી? ∠અબક મને તેવડો દોરો. અબ જેવડી ઢાંઈ લીટી લો. ઈ બિંદુ આગળ ∠ઢાંઈફ, ∠અબકથી મોટો કરો. ઈફ, બકની બરાબર કરો. અક, ઢફ સાંધો. અક, ઢફથી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કકડામાંથી બે નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. બે નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (બે) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે બે સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. કયું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

“જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાની બે બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો બીજાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણાથી

મોટા હોય, તો પહેલાનો પાયો બીજના પાયથી મોટો હોય છે.”

ગમે તે લંબાઈની અથ, ચક્ર લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. ડાઈ, ઈફ લીટીઓ અનુક્રમે અથ, ચક્ર જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજો ત્રિકોણ કરો. અથ, ડફમાંથી કઈ બાજુ મોટી છે ? \angle અથ, \angle ડાઈફ માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? અથ, ડફના નાનામોટાપણા સાથે \angle અથ, \angle ડાઈફના નાનામોટાપણાનો કંઈ પણ સંબંધ છે ? “હા.” (પુ.). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી બીજી બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજી જોડનો બીજો એક ત્રિકોણ કરો. બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુ બીજની બે બાજુઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજના પાયથી મોટો છે. આ પાયની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“જો બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાનો પાયો બીજના પાયથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો છે તેના પાયની સામેના ખુણો, નાના પાયવાળા બીજ ત્રિકોણના પાયની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

ત્રિકોણના બીજ કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કકડામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ.). શું જણાય છે ? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દાર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે.”

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લો. તેનો પાયો વાળીને દુભાગો. ત્રિકોણને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી

(અલગત સળરપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પુઠ). “સમઘિબાજુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલગત) સરખા હોય છે.”

એજ નિયમ સમબાજુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે ? “પડે છે.”

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પુઠ). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિશે શી ખાસ બાબત જણાય આવે છે ? “ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજાને એકજ બિંદુમાં છેદે છે.

આ લીટીઓ એક બીજાને છેદીને તેમના જે બપ્પે ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પુઠ). તમને શું દેખાય છે ?

“મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે.”

ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પુઠ). આ ઉપરથી તમને પાચો અને આ લીટી એમની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે ? “ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે.”

ગડી વાળાને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ગડી વાળાને સાંધો. આ ગડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે.

થાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકીને સરખાવો. (પુઠ). તમને શું જણાય છે ? “તે બધા એકરૂપ છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધા સળો એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે ? “હા.” (પુઠ). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી બે લંબ દોરો. તે બંધાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે ? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે ?

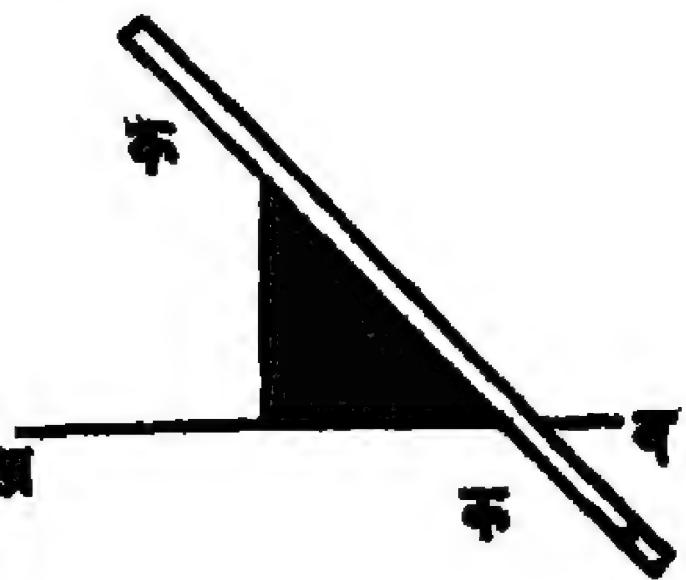
“ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

ત્રિકોણના ખુણા ગડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. “તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

લંબ.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દોરવાની રીત:—

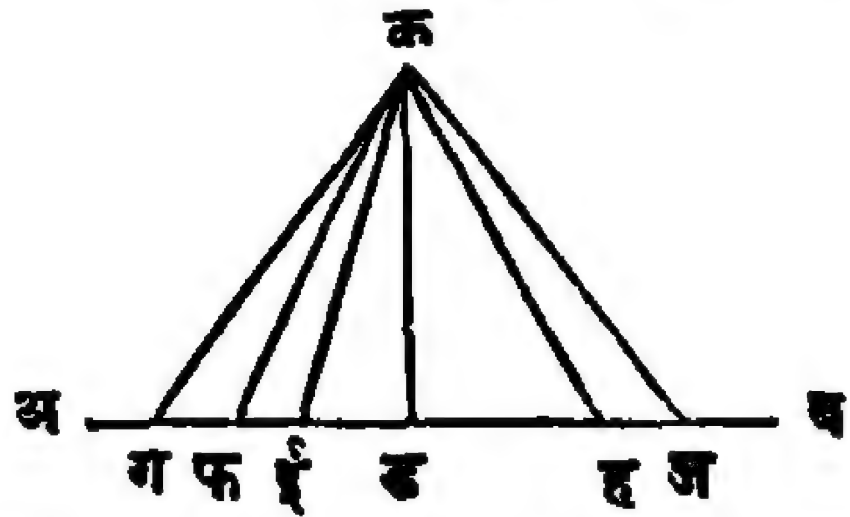
ધારો કે અવ આપેલી લીટી છે, અને ક આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણમાપની કાટખુણા કરનારી એક બાજુ અવને લગાડીને માપ અવની ઉપર ક નીચે રાખો. પછી માપના



કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને ફુટપટ્ટી મૂકો.

પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને બરાબર અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

અब લીટી પર ઢક લંબ દોરો. પછી ક બિંદુમાંથી કઈ, કફ, કગ, ગમે તે બીજી લીટીઓ અબને મળે એમ દોરો. કહની લંબાઈ માપો. પછી કઈ, કફ, કગની લંબાઈ માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી નાની લીટી કઈ? “લંબ”



ક બિંદુમાંથી અબ સુધી લંબથી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? “ના.”

આ ઉપરથી, કોઈ એક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૌથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શો નિયમ સમજાય છે? “લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે.”

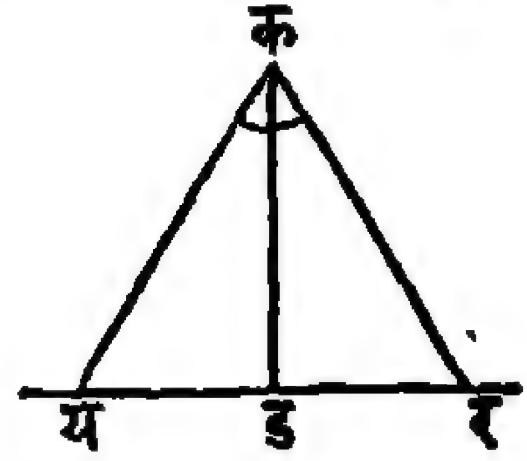
હકઈ અને હકફ ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? કઈ અને કફ આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ હકહ અને હકજ એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? કહ, કજમાં મોટી લીટી કઈ? કમાંથી અબ લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ કહ લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં હકઈ ખુણા કરતાં હકફ ખુણો મોટો છે, અને હકફ કરતાં હકગ મોટો છે, અને કઈથી કફ લીટી મોટી છે, અને કફથી કગ મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શો સંબંધ જણાય છે?

“આ ખુણો જેમ મોટો તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે.”

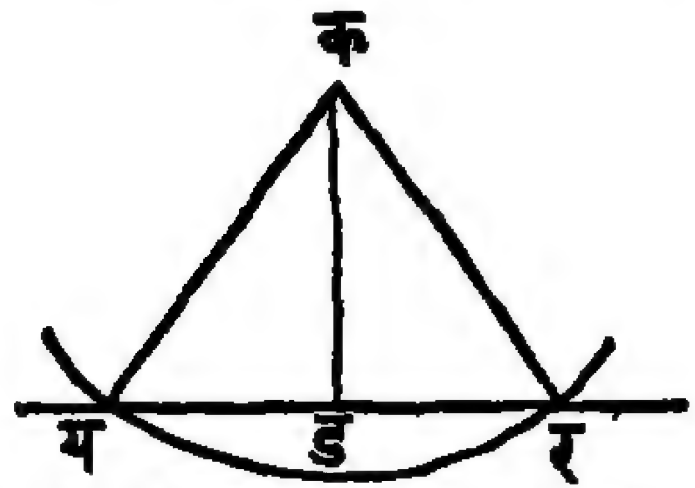
ઉપલી આકૃતિમાં \angle કઈહ, \angle કફહ, \angle કગહ, એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને કઈ, કફ, કગ લીટીઓનું નાનામોટાપણું, એ

એ વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે ? “લંબ તરફનો ખુણા જેમ નાનો તેમ ખુણા કરનારી લીટી લાંબી હોય છે.”*

ચર લીટી પર દોરેલા કહ લંબની સાથે ગમે તે ઢકચ ખુણા કરો. \angle ઢકચ ખરાબર \angle ઢકર કરો. કચ અને કર માપો. તેમને સરખાવો. આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું જણાઈ આવે છે ? “લંબની જોડે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.”



એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં ર બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના ક બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને કર ત્રિજ્યાએ, આડી લીટીને ચ બિંદુમાં છેદે એવો રચ કૌંસ દોરો. કચ, કર સાંધો. \angle ઢકચ, \angle ઢકરને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે ?



ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય છે ? “આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા ખુણા કરે છે.”

એક અથ લીટી દોરો. તેની બહાર ક બિંદુ લો. ક બિંદુથી અથ કેટલે અંતરે છે ? કમાંથી અથ સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ

જોતેમ છતાં પણ ઉપલા જે પ્રયોગ પરથી એમ સિદ્ધ થવું નથી કે ખુણાના પ્રમાણમાંજ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણા દોઢગણો મેટા હોય તો લીટી દોઢગણી મેટી કે નાની હોય.

ક અને અઘ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ બે ૨ વચ્ચેનું અંતર પૂછ્યું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું તે આપણે કહીએ છીએ; માટે કથી અઘ સુધીનું અંતર તે અને અઘ વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર કયું તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે “આ અંતર કમાંથી અઘ પર દોરેલો લંબ છે.” કમાંથી ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી કમાંથી અઘ દોરી શકાશે કે? “ના.” આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ બે વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુમ તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

- (૧) અઘ=૧.૨” લો. ઘ છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દો
- (૨) અઘ, કઠ લીટીઓ દોરો, અને કમાંથી કઠ પર લંબ દો
- (૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમ સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ગડી વાળીને દુભ દુભાગનારી લીટી (સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમ ખુણાના બુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. ત શું દેખાય છે? “તે સરખા છે.”

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભ દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લખો દોરો. તેમને એક બીજાને મ સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તમને વિશેષ બાબત જણાઈ આવે છે? (પુ. ૮). “તે બધા એકજ બિંદુ મળે છે.”

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃતિ

સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે, માટે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહો. અટકળથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાજુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

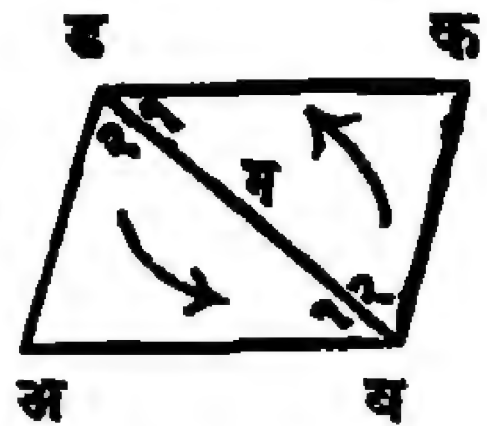
વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય છે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. તેમના કર્ણો દોરો, અને કર્ણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ માપો, અને તેમને સરખાવો. (પુઠ). આ પરથી તમને કોઈ સામાન્ય નિયમ સમજાય છે? “સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.” સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પુઠ). શું જણાઈ આવે છે? તેઓ એકરૂપ છે.”

(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

અવકઠ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. વઢ કર્ણ છે. ઢવતું મધ્યબિંદુ મ છે, એમ ધારો.

\angle અવઢ = \angle વઢક; } કારણ કે તે સમાંતર
 \angle અઢવ = \angle કવઢ; } લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ
 ખુણા છે.



હવે અવકઠ ચતુષ્કોણની નકલ અવકઠ ચતુષ્કોણ પર મૂકીને મ બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તો મવ, મઢ બરાબર છે તેથી વ, ઢ પર પડશે. જ્યારે વ, ઢ પર પડે છે ત્યારે \angle અવઢ, \angle વઢકની બરાબર હોવાથી વઅ, ઢક પર પડશે. તેમજ ઢમ = મવ, માટે ઢ, વ પર પડશે; અને \angle અઢવ = \angle કવઢ છે, માટે ઢઅ, વક ઉપર પડશે.

હવે ઘઝ,ઢક પર પડશે, અને ઢઝ, ઘફ પર પડશે, માટે ઝ,ક પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બતાવી શકાશે કે ઢક, ઘઝ ઉપર પડે છે; કઘ, ઝઢ પર પડે છે; અને અલબત્ત ક,ઝ પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે ઘઝ, ઢકની બરાબર છે; ઝઢ, ઘકની બરાબર છે; ઝમ, મકની બરાબર છે; સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ જણાઈ આવે છે ?

“સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

- (૧) સામસામા ખુણાં સરખા હોય છે,
- (૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;
- (૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ દોરો. તેમના છેડામાંથી પહેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ દોરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે ? “બધી બાજુ સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે.” એવી આકૃતિને ચોરસ કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ બીજા પર જુદી જુદી રીતે મૂકીને ચોરસના ખુણા અને બાજુઓ સરખાવો. શું જણાય છે ?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને લંબચોરસ કહે છે.

એક બીજી તિર્યક (સાંકડો કે પહોળો) ખુણા કરનારી બે સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક (સાંકડો કે પહોળો) ખુણા કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય તો જે આકૃતિ બને છે, તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે. [સમપ્રતિભુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, ભુજ એટલે બાજુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

“લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે.

“સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે, અને ફક્ત સામસામી ખુણા સરખા હોય છે.”

“સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.”

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરો:—

૧"; ૧.૨", ૧.૪", ૯ મિ.મી; ૧.૨ સે.મી.; ૧.૫ સે.મી; ૨.૨ સે.મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરો:—

૨", ૧", ૧.૨", ૧"; ૧.૪", ૦.૮"; ૩"; ૨"; ૨.૨", ૧.૨"; ૩.૫", ૧.૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણા લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ=૧", \angle હઅવ=૪૫°; અવ=૧.૩", \angle હઅવ=૭૫°;
અવ=૧.૫", \angle હઅવ=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાજુઓ અને ખુણા લઈને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ	હઅ	\angle હઅવ
૨"	૧.૫"	૩૦°
૧.૨"	૧"	૧૨૦°
૨"	૨.૨"	૧૦૦°
૧.૭"	૧.૭"	૪૮°

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એમના બંને કર્ણ દોરો; અને કર્ણોના ભાગો અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પુઠ). શું જણાઈ આવે છે? ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને દુભાગે છે (એટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને તિર્યક્ ખુણે દુભાગે છે."

વ્યાખ્યા:—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને ચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસપાસેની બાજુઓ નાની મોટી હોય છે, તેને લંબચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા અને જે પહોળા) હોય છે તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (જે સાંકડા અને જે પહોળા) હોય છે તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને કાટખુણ ચોખુણ કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક ચતુષ્કોણ દોરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. (૫૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હંમેશજ સરખા હોય છે કે ? એવા ચતુષ્કોણને વિષમબાજુ ચોખુણ કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણની ફક્ત બેજ બાજુ સમાંતર હોય તો તેને સમલંબ ચોખુણ કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે ?

એક વિષમબાજુ ચોખુણ અને એક સમલંબ ચોખુણ હાથે દોરો.

ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણ ચોખુણ કહેવાય છે.

બધા કાટખુણ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે.”

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણ એક બીજા પર લંબ હોય છે.” તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે ? “.....”

બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?

“તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.”

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે ? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે ?

ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તો મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં ‘હા’ એમ લખો.

	સામસામી બાજુએ અને ખૂણા સરખા છે?	કર્ણ એક બીજને દુભાગે છે?	અથા ખૂણા કાટ ખૂણા છે?	કર્ણો સરખા છે?	કર્ણો એક બીજ પર લંબ છે?	પાસપાસેની બાજુએ સરખી છે?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખુણુ દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કણુ એક બીજાને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે કે કેમ તે જુઓ. (પુ૦)

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“ચોખુણુમાં બે—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે બેડમાંથી દરેક બેડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે બેડમાંથી એક બેડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય; અથવા

(૪) કણુ એક બીજાને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખુણુ સમાંતરબાજુ છે.”

પ્રશ્ન

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણુ ચોખુણુ.

“ “ ૩" અને ૨^૧/_૨" “ “ “ “

“ “ ૩.૨" અને ૫" “ “ “ “

“ “ ૧.૫" અને ૨" “ “ “ “

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાંતરબાજુ ચોખુણુ.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫" ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.

“ ૨" અને ૩" “ ૮૦° “

“ ૫" અને ૪" “ ૧૨૦° “

“ ૨" અને ૪" “ ૧૫૦° “

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખ્ખુ કરો:—

અવ=૬૦૩ સે.મી., વ=૮૨°, વક=૮૦૨ સે.મી., ક=૯૦°,
કઢ=૭૦૭ સે.મી.

અવ=૩૦૪", વક=૨૦૨", અઢ=૨૦૯", અ=૬૮°, વ=૮૬°.

વ=૧૧૬°, વક=૧૦૪", ક=૯૯°, કઢ=૧૦૯", ઢ=૯૨°.

અ=૬૭°, વ=૧૧૩°, ક=૪૬°, અવ=૫૦૩", અઢ=૮૦૬".

વ=૧૨૨°, ક=૧૩૦°, ઢ=૪૫°, વક=કઢ=૧૦૬".

અઢ=૩", ઢ=૧૧૮°, ઢઅક=૨૭°, વઅક=૩૫°, અવ=૨૦૪".

અક=૫૦૬", વઅક=૫૮°, ઢઅક=૫૯°, વકઅ=૫૮°,
ઢકઅ=૬૯°.

અવ=૧૦૯", વઢ=૧૦૭", કઢ=૨", અવઢ=૧૧૮°, વઢક=૨૩°.

અવ=કઢ=૫૮ સે.મી; અઢ=૪૦૭ સે.મી; અ=૭૨°, વઢક=૪૬°.

પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[સૂચના:—આની પહેલાંનો સર્વ ભાગ જોમને ચાલી ગયો હોય એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેરે ન લેતાં પહેલા ખડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી ખીજું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક લાકડાના ધન કરતાં ખીજો ધન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ પહોળાઈ, અને જડાઈ જોઈને કહીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના

નિયમો બાંધવામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની બાબતોના અને ખુણાઓના જે ધર્મો ઉપર આ નિયમો નક્કી થાય છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને ભૂમિતિ કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનો વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ, અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડ્યું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; મિતિ=માપતું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘ પદાર્થ ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જેટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમનો આકાર હોય છે. પેટી ચોખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખંડો હોય છે. ત્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જો તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

બધા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેનો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે:—બધા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

• કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કકડા વગેરે) એવા હો, કે જેમની પહોળાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા હો, કે જેમની લંબાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા હો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જડાઈ ઓછીવત્તી હોય;

અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાજુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેનો સામાન્ય નિયમ કાઢવો:—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ, એ પરિમેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ-આ પરિમેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિમેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીજાકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાજુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાજુને તે પદાર્થની લંબાઈ; લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાજુને તેની પહોળાઈ; અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઉભી આવેલી) બાજુને તેની જડાઈ કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૌથી મોટી બાજુને લંબાઈ, તેનાંથી નાની બાજુને પહોળાઈ, અને સૌથી નાની બાજુને જડાઈ, એમ પણ કહે છે. એમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાજુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

પૃષ્ઠ.

આ દડાને જુદી જુદી બાજુથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? પૈસો સર્વ બાજુએથી જુઓ.

તો આકાર બધી તરફથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ ઈંટ તરફ
મે ગમે તે બાજુએથી જુઓ તોપણ તે સરખીજ દેખાય છે કે ?
! લંબાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? પહોળાઈની
બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? ઉપરની બાજુએથી
કેવી દેખાય છે ? દો બધી બાજુએથી સરખો દેખાય છે, પણ
માંકણી, પૈસો, ઈંટ, વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી.
એનું કારણ શું ? “તેમની બાજુઓ જુદા પ્રકારની છે, એટલે
તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે.”

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કયો ધર્મ સમજાય છે ?
‘તેમને* પૃષ્ઠો હોય છે.”

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે ? શંકુને કેટલાં ? ગોળાઈને કેટલાં ?
પૈસાને કેટલાં ? પેટીને કેટલાં ? “દડાને એક પૃષ્ઠ હોય છે, શંકુને
અને ગોળાઈને બે પૃષ્ઠ હોય છે, પૈસાને ત્રણ પૃષ્ઠ હોય છે, પેટીને
છ પૃષ્ઠ હોય છે.” વાંકાચુંકા પથરને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે ? “તેને
અનેક પૃષ્ઠ હોય છે.”

દડાનું પૃષ્ઠ અને ધનનું પૃષ્ઠ તપાસો. તે બે વચ્ચે તમને શો
તફાવત જણાય છે ? “દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ધનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે.”

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં-સપાટ અને વક્ર.

જેનાં બધાં પૃષ્ઠો સપાટ હોય, એવા પદાર્થને ઓછામાં ઓછાં
કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠો હોય છે ? “ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકોણાકાર
મિનારો કે શંકુ.”

કોઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું
દેખાય છે ? “કોર” આ કોર ભૂમિતિમાંથી કઈ આકૃતિ જેવી
દેખાય છે ? “લીટી જેવી.” બેથી વધારે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે
છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “અણી.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ?

● બાજુ કરતાં પૃષ્ઠ શબ્દ વધારે સારો છે. બાજુ શબ્દનો કોર એવા
પણ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ શબ્દનો એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ
શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હોય તો અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડો થશે નહિ.

“અણી.” અણી, ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે ?

“મિંદુ જેવી.”

જે પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી ‘(પાસપાસેનાં) જે પૃષ્ઠોને એક ખીમથી ઓળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી.’ એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શકુને પૃષ્ઠ કેટલાં ? કોરો કેટલી ? ખુણા કેટલા ? અણી કેટલી ? જે પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “કોર.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “અણી.” ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે ? (ધન, શંકુ, ઈટિ..... વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને લીટીના છેડા મિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે ? “હા.” પહોળાઈ હોય છે કે ? “હા.” જડાઈ હોય છે કે ? “ના.” (જડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર કોઈ આપે તો નીચેનો પ્રયોગ કરીને ચોખ્ખો જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે ? “હા.” આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધું પાણીજ છે અને ઉપર બધી હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી પુરું થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કંઈ જડાઈ હોવાનો સંભવ છે ?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી પુરું થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને પૃષ્ઠને જડાઈ નથી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઈ ધસાતાં ધસાતાં એટલું ધસાયું કે તેને જડાઈ નામની પણ ખીલકુલ રહી નહિ; એવી આપણે કલ્પના કરીએ,

તો તેનો લંઘાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ તેને જાડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંઘાઈ અને પહોળાઈનોજ વિચાર કરવો પડે છે; જાડાઈનો ખીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ દેકાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંઘાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠનો એક ઘણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે.

પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં ? “એ.” પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે ? “લીટી જેવા.”

વર્તુળ, પરિધિ, વ્યાસ, કૌસ, અને વ્યા, એમને પરિમેયો કેટલાં ? પાનળા કાગળનો કકડો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર, એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે ?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા:—પૃષ્ઠને ફક્ત લંઘાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ ખીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે ? બે સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ધનની કે ઈંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી બે વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. બે સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. બે વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે ? “સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક બીજા સાથે બરાબર મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે.”

સપાટ પૃથ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃથમાં રહે છે કે પૃથની બહાર રહે છે ? વાંકા અને ઉંડા પૃથ ઉપર બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરાથી દર્શાવો. (પહેલાંની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃથમાંજ રહે છે, કે પૃથની બહાર રહે છે ? વક્ર પૃથમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃથમાં રહે છે કે ?

આ પરથી સપાટ પૃથ અને વક્ર પૃથની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ? દડાના કે નળાકારના પૃથ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે ? “ના.”

સપાટી.

કોઈ પૃથ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃથ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધાર્યું હોય, તો તે જે જગા રોકે છે, તે તે પૃથની સપાટી છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છોકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીઉં આડું મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયોગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવો.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને તેમની વચ્ચે જે સીધી લીટી દોરી હોય, તો તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તો તે સપાટીજ નથી.)

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ ?
“ત્રણ.”

ચોપડીની છ બાજુમાંથી કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ? દાખડીની કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ?

ત્રણથી વધારે નાની મોટી લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી, અને તેમના પર પાટીઉં આકું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઉં જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમાં નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઉં મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં બીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છોકરાંને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીનો બરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજી ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડો.

ધારો કે મેજના બે પાયા નીચે પથર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવો.

એકાદ પાટીઉં જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટીમાં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું ?

એક કાચનું પ્યાલું પાણીથી ભરો. પાણીના પૃષ્ઠની સપાટી કઈ ? આ કાંઈ બીજી એક સપાટી છે એમ ધારો. કાંઈ પાણીમાં ત્રાંસું બોળો. આપણે જોઈએ છીએ કે કાંઈની સપાટી પાણીના પૃષ્ઠને છેદે છે. આ બે સપાટી"ન્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “લીટી.”

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને ન્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “લીટી.” તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે ? “ના. તે વાંકી લીટી હોય છે.”

લીટી*

કાળા પાટીઆ પર પટી મૂકવી. પટીની બાજુએ ચાકની અણી પાટીઆ પર ધીમેથી દાખવી; એટલે પાટીઆ પર બિંદુ પડશે. પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે. એવી રીતે વારંવાર ટપકાં ઉમેર્યા હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાત† કહાવવી.

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લેવાં, અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરે પલાળીને, દોરે લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સૌથી ટુંકી છે? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી? “સીધી.” આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે બિંદુઓની વચ્ચે દોરે. દોરી શકાય છે? “ના.” આ પરથી સીધો લીટીનો કયો ધર્મ જાણવામાં આવે છે? મુકરર અંતર પરનાં બે બિંદુઓની વચ્ચે જો કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો દોરો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાંધો. આ દોરથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાંધો. પહેલા દોરથી અને બીજા દોરથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે? આ પરથી બે બિંદુ વચ્ચે જો એક સીધી લીટી અને

* આ ભાગમાં ‘સીધી લીટી’ અને ‘વક્ર લીટી’ વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં ‘લીટી’ એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવો.

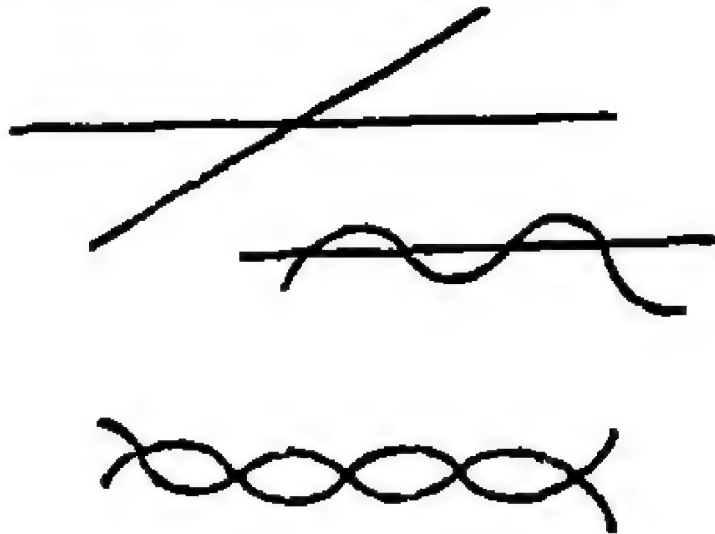
† એ વાત ફક્ત રચૂળ રીતે બોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખવું. સાચી દૃષ્ટિથી એમ કહેવું બસબસ નથી.

।જી કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પૈકી સૌથી ટુંકી લીટી કઈ હોય છે, એ વિષે શું સમજાય છે ?

એ બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ બિંદુઓને ધિનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે ? “ના.” આ બે બિંદુઓ વચ્ચે તમે બીજી કોઈ સીધી લીટી દોરી શકશો ? “ના.” આ ઉપરથી સીધી લીટીનો બીજો કયો ધર્મ જણાઈ આવે છે ?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તેમના પર ચુકો મારો. મની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાંધો. બીજા બે ત્રણ દોરા તેવીજ ને તાણીને બાંધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદાં જુદાં સ્થાનમાં પડે છે ? આ પરથી બે બિંદુઓની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી લીટીઓ કેટલી કાઢી શકાશે, એ વિષે શું જણાય છે ? “એક મદથી બીજા બિંદુ સુધી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે.”

એક સીધી લીટી દોરો. તેને છેદનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. એક વાંકીચુંકી લીટી લો. તે વધારેમાં વધારે બિંદુઓમાં છેદનારી બીજી સીધી અથવા વાંકી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા મારણે) દોરો. બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુઓમાં છેદે છે ? “એક.” વાંકી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુમાં છેદે ? “એકથી વધારે બિંદુઓમાં.”



એકથી વધારે બિંદુઓમાં એક બીજીને છેદનારી બે સીધી લીટીઓ દોરી શકાય કે ? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ સમજાય છે ? “બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને એકથી વધારે બિંદુઓમાં છેદતી નથી.”

બે સીધી સળા લો, અને તેમની મદથી કોઈ જગાને ઘેરી નો પ્રયત્ન કરો. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે ? “ના.”

સીધી લીટી દોરો, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. તેમ કરી શકાય છે કે ? “ના.” એ વાંકી લીટીઓ લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. ઘેરી શકાય છે કે ? “હા.” આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શો તફાવત જણાય છે ? **“એ સીધી લીટી જગા ઘેરી શકતી નથી.”**

એક આંખ મીચો, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના બંને છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાઈ આવે છે ?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તે નીચેની લીટી પર બરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કડકા ઉથલાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે ? **“સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર બરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકી લીટીઓનું એમ થતું નથી.”**

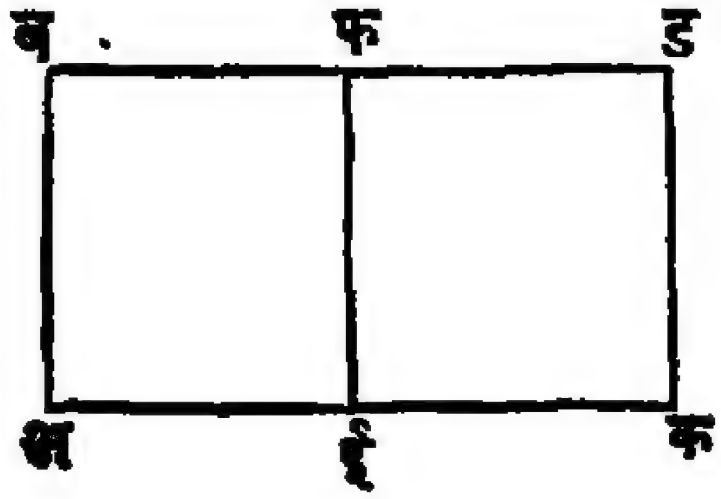
વ્યાખ્યા:—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (ઉલટાવ્યો હોય તોપણ) ઉંચકીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (બંને ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર બરાબર એસે, તો તેને સીધી લીટી કહે છે. કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે ? “ના.” સારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જાણવાની જરૂર છે. “એ.”

આપેલાં બે બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો ?

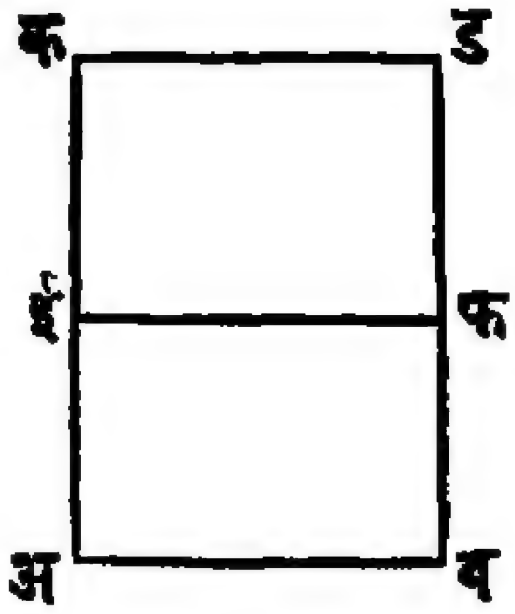
કોઈ ખેતરમાં એક ઝાડથી બીજા ઝાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો ?

અબઢક એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કડકો છે. એને ખરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે બે ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં **ઈફ** લીટી



શું દર્શાવે છે ? “ અબઢક કાગળના કડકાને દુભાગનાર સળની જગા. ” **ઈફ** લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને **ઈફ** અને અબ વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય ? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જો દસ લીટીઓ વડે **ઈથી** અ સુધીની જગા પુરાર્થ જાય, અને **ઈથી** અ સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે ? “ એક ઇંચ. ” જો દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કડકો દર્શાવે છે, તો **ઈફ** લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે ? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી ? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના કયા ભાગમાં જશે ? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ ? “ કાપી શકાશે. ” ત્યારે સળને પહોળાઈ છે કે ? “ ના. ” સળને જો પહોળાઈ નથી, તો **ઈફ** લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે ?

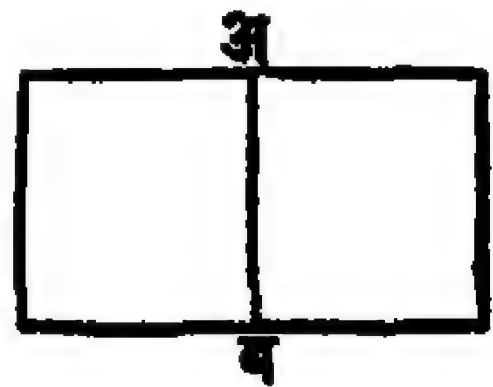
અવકાશ એક ખેતર છે, અને તે ક્ષ અને જ્ઞ એ બે ભાઈએ વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના અવકાશ અને ફાલક એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધો. ધારો કે ક્ષને ભાગે દક્ષિણ તરફનો કકડો આવ્યો, અને જ્ઞને ભાગે ઉત્તર તરફનો કકડો આવ્યો. આ બે કકડા પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કંઈ જગા છે કે? “ના.”



છે એમ જો તમે કહો, તો તે બે ભાઈઓમાંથી કોને ભાગે આવી છે, એ તમારે કહેવું જોઈએ. બે કકડાની વચ્ચે જો જગા નથી, તો ફાલ લીટી દોરી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનો કયો ભાગ દર્શાવે છે? “કોઈ પણ નહિ.” ફાલ લીટીની નીચે અવ લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પંચી એક લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી વીસ લીટીઓ ફાલથી અવ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે ફાલ અ સુધીની જગા રોકાઈ જાય, અને ફાલની લંબાઈ જો વીસ ફુટ હોય, તો દરેક લીટી કેટલી જગા દર્શાવે? “એક ફુટ પહોળી.” ફાલ લીટી એક ફુટ પહોળી જગા દર્શાવે, તો એ કકડો (ફાલ લીટીથી દર્શાવતી એક ફુટ પહોળી અને ... ફુટ લાંબી જગા) કોનો? ક્ષના અને જ્ઞના ભાગના કકડાઓની વચ્ચે જો જગા રાખવાનું કારણ નથી, તો ફાલ લીટી શા માટે દોરી છે? “.....” જો આ લીટી જગા દર્શાવતી નથી, તો તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? “ક્ષની જમીન ક્યાં પુરી થાય છે, અને જ્ઞની જમીન ક્યાં શરૂ થાય છે, તે તે દર્શાવે છે.”

ત્યારે લીટી ખરેખર જગા દેખાડે છે, કે હદ? “હદ.”

બે છેક લીસા ધન લઈને એક ખીજને બરાબર અડકાડીને મૂક્યા હોય, તો તેમનું ચિત્ર આપણે શી રીતે દોરીશું? પાસે દોરેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં અવ લીટી કાગળ પર કેટલીક જગા રોકે છે, એ કારણથી શું આપણે બે

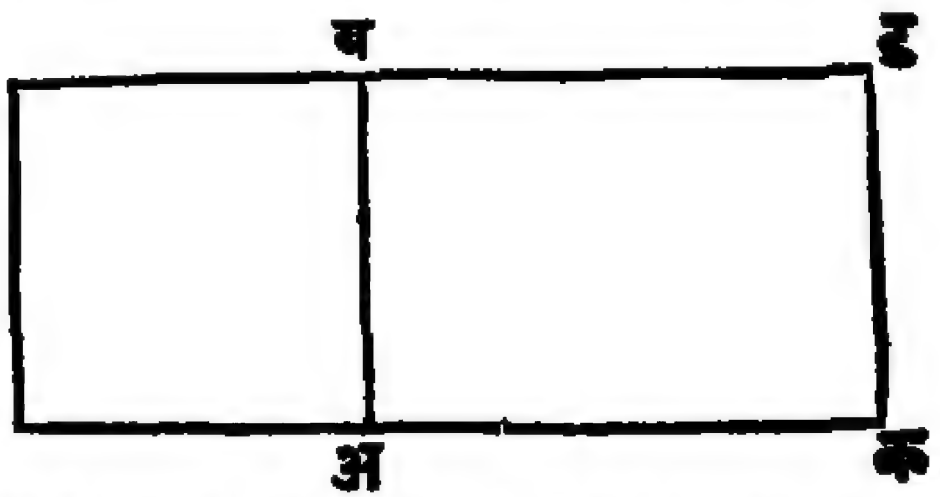


ધનની વચ્ચે કેટલી જગા છે એમ ધારી શકીએ ? “ના.” સારે આ લીટી શા માટે દોરી છે ? આ લીટી ક્ષેત્રફળ દેખાડે છે કે હદ ? “હદ”

એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે ખીજો કોઈ રંગ લગાડ્યો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ઘોળો ભાગ, એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો ? તેને જો રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી ? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે ? “ના.”

ઉપલા દાખલામાં બે ઘન જ્યાં એક ખીજાને મળે છે, અથવા જ્યાં ખેતરના બે ભાગ એક ખીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે ? “ના.” લંબાઈ છે કે ? “છે.” આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ; પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી ? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે ? “ના.” એવી લીટી કાઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર જોતાં લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.*

• પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે તેમાં અ ઝાડથી ઘ ઝાડ સુધી એક કરોળીઆએ પોતાનો તાંતણો તાણ્યો છે. હવે ખેતરના નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ કેટલી



છે તે કહી શક્યો ? ધારો કે તે સ્કેલ ૧"=૧૦' છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો ? “અથ લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ ભરે તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફૂટ સમજવા.” અથ લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે ? “ના.” એમ કદાચ તમે કહેશો. અથથી આકૃતિનાં ઝાડ સુધી એક બીજાને અડકી રહે એવી લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી અથથી કાઢ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો અથી ક સુધીનું

લીટી દોરવાનો હેતુ—કોઈ પદાર્થ ઝાં શરૂ થાય છે, તે ઝાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે, એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે લીટી, એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

વાળ અથવા ઝીણો દોરો એ લીટી છે કે ? “ના.” કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,.....વગેરે લીટીઓ છે કે ? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ, એમાંથી કયાં પરિમેયો હોય છે ? “લંબાઈ.” ત્યારે હવે લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે ? “એક.”

ખિંદુ.

એક ખીજને છેદતી બે લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક ખીજને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો ભાગ ભૂસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે, તે જુઓ, અને બે લીટીઓ એક ખીજને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે તે કહો. “ખિંદુ.”

એક દશાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક ખીજને છેદે, તો તે જે ખિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે ખિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? “એક દશાંશ ઇંચ.”

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક ખીજને છેદે, તો તે જે ખિંદુમાં છેદે છે તે ખિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી ? “એક વીસાંશ ઇંચ.”

અંતર ૧૦ ફુટ હોય તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{10 \times 12 = 120}{120} = 1$ ઇંચ

અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળાઆનો તાંતણો દર્શાવે છે, તે બે એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળાઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થવું કે ? જે લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી ? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જડાઈ) બરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. “એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી.” ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે ? “હા.”

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો બે લીટીઓ એક બીજીને જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? “બીલકુલ નહિ.”

બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં બિંદુ બને છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે બિંદુને પણ લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં બિંદુ અમુક સ્થાનમાં હોય છે, તેથી તેને સ્થાન કે સ્થિતિ હોય છે.

તેથી, ‘જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે બિંદુ,’ એવી બિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વમધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ,.....એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઢવાં અશક્ય છે, માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણા કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણા કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ધનાકૃતિ બને છે.

નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.

(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુક્તિલક્ષમાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહ સિદ્ધાંત કહે છે.

પ્રમેય અને કૃત્ય—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને પ્રમેય કહે છે, અને બીજાને કૃત્ય કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતમાંથી એમ : એમ નીકળે છે, અથવા જે તેની મદદથી ટુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો ઉપસિદ્ધાંત કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અં અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલ હોય છે, તેને પ્રતિજ્ઞા કહે છે. જેમકે:—“સમબાળુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.”

પક્ષ અને સાધ્ય—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાં પક્ષ કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું સાધ્ય કહેવાય છે.

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષ અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાં સાધ્ય મૂક્યું હોય; અને સાધ્યને બદલે પક્ષ અથવા પક્ષમાંનું જેલી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ કહે છે. જેમકે:—“સમબાળુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે,” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “સમકોણ ત્રિકોણ સમબાળુ હોય છે,” એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. “જે સંખ્યામાંનું આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાંગી શકાય છે, અં

જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા છ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે;” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે છ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે;” આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળનાં પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરંતુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિતો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી ઠરશે. આ કારણને લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

+	એટલે વર્ગ.	—	એટલે ઓછા.
=	એટલે ની બરાબર.		એટલે સમાંતર.
>	એટલે થી મોટા.	<	એટલે થી નાના.
∴	એટલે માટે, તેથી.	∵	એટલે કારણ કે.
∠	એટલે ખુણા.	△	એટલે ત્રિકોણ.

⊙ એટલે વર્તુળ.



એટલે સમાંતરચતુષ્કોણ.
ચતુષ્કોણ.

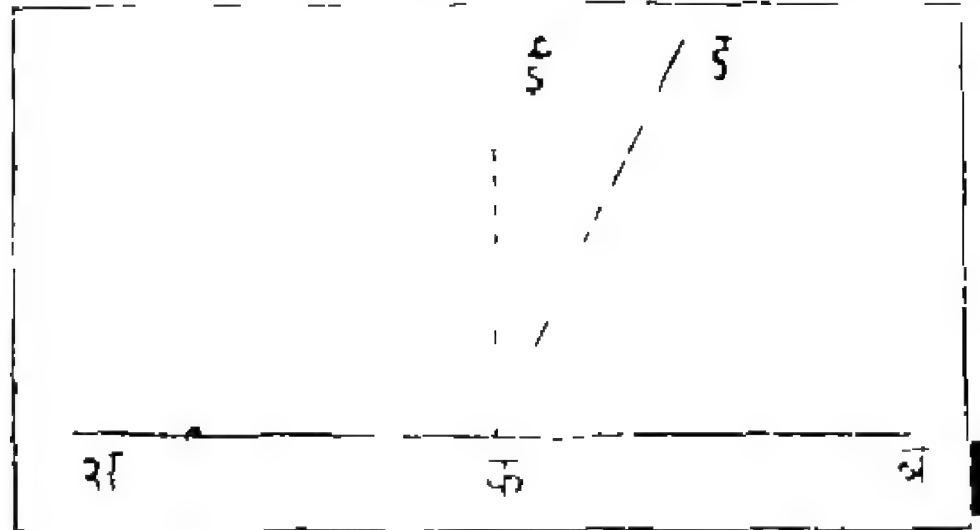
≡ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.

પ્ર૦ એટલે પ્રમેય.

કૃ૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—ઢક સીધી લીટી અથ સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય— \angle અકઢ + \angle ચકઢ = ૨ કાટખુણા.

અથ પર ઢક લંબ હોય, તો \angle અકઢ + \angle ચકઢ = ૨ કાટખુણા એ સિદ્ધ છે. પરંતુ અથ પર ઢક લંબ ન હોય તો—

રચના—અથ પર કઈ લંબ દોરો.

સિદ્ધતા— \angle અકઢ = \angle અકઈ + \angle ઈકઢ, (પ્રત્યક્ષ.)

\angle ચકઢ = \angle ચકઈ - \angle ઈકઢ,

$\therefore \angle$ અકઢ + \angle ચકઢ = \angle અકઈ + \angle ચકઈ.

પણ \angle અકઈ + \angle ચકઈ = ૨ કાટખુણા. (રચના)

$\therefore \angle$ અકઢ + \angle ચકઢ = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દોરી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧લા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અમલ અને કમલ આ બે લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે, અને અમલ કાટખુણો છે; તો મ બિંદુ પાસેના બાકીના કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અવક ત્રિકોણમાં \angle અવક = \angle અકવ, અને વકને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

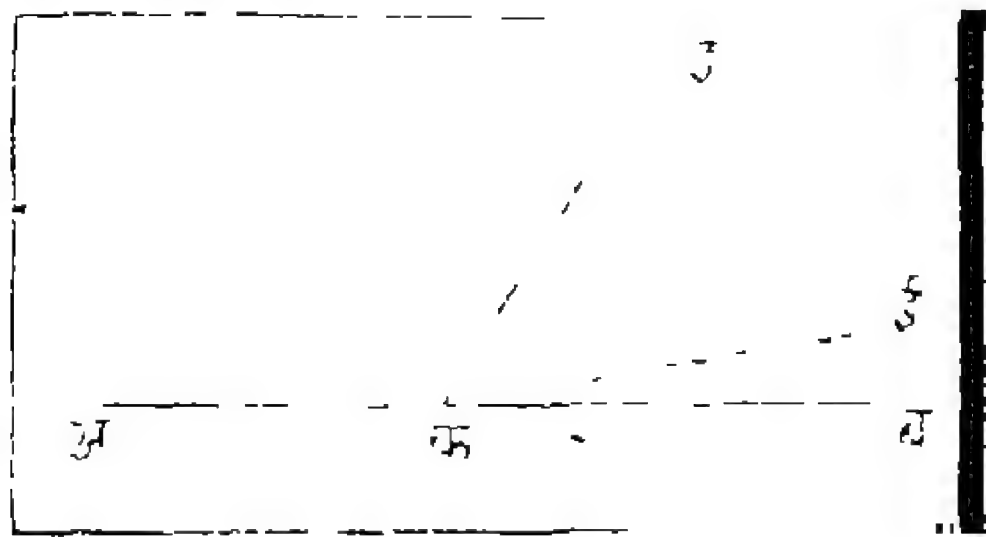
૩. અવક ખુણાને વઢથી દુભાગ્યો છે, અને ઢવ, ઈ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવઈ = \angle કવઈ એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવ લીટીને કઢ લીટી ક બિંદુમાં મળે છે, અને \angle અકઢ, \angle ઢકવ અનુક્રમે કઈ અને કફ લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો \angle ઈકફ કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. જો અવ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ અવની એકજ બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ કાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના ભુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પક્ષ—અકઢ અને ઢકવ એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને બેમનો સરવાળો બે કાટખુણા છે.

સાધ્ય—કઝ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો કઝ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો અકને વધારીને અકઈ સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અકઈ સીધી લીટી છે,

$$\therefore \angle$$
અકઢ + \angle ઢકઈ = ૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૧)..

પણ \angle અકઢ+ \angle ઢકઘ=૨ કાટખુણા, (પક્ષ) "

$\therefore \angle$ અકઢ+ \angle ઢકઈ= \angle અકઢ+ \angle ઢકઘ.

દરેક બાજુમાંથી સાધારણ \angle અકઢ બાદ કર્યો;

\therefore શેષ \angle ઢકઈ = શેષ \angle ઢકઘ.

\therefore કઈ, કઘમાં મળી જાય છે, એટલે કઈ, કઘની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ કઝ, કઘ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧માં કઝ અને કઘ એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને \angle અકઢ+ \angle ઘકઢ=૨ કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં \angle અકઢ+ \angle ઘકઢ=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે, અને કઝ, કઘ એક સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય ૧ વ્યત્યાસ છે.

૨જ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જ્ય લીટીમાંના અ બિંદુમાંથી જવની બંને બાજુએ કાટખુણા કરીને અક અને અઢ લીટીઓ દોરેલી છે, તો કઝઢ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અમક લીટીમાંના મ બિંદુમાંથી તેને બંને બાજુએ મઘ, મઢ લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે \angle અમઘ= \angle કમઢ; તો ઘમઢ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૩. મ બિંદુમાંથી મઘ, મઝ, મક, એ ત્રણ લીટી દોરેલી છે; અને મપ લીટી \angle ઘમઝને અને મઢ લીટી \angle અમકને દુભાગે છે. હવે જો ઘમઢ કાટખુણો હોય, તો ઘમક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના સામસામા ખુણા દુભાગનરી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદતી હોય, તો તેમના છેદનબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કઢ સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે જોડ થાય છે; એક $\angle અ$ અને $\angle બ$ ની બનેલી, અને બીજી $\angle ક$ અને $\angle ડ$ ની બનેલી.

સાધ્ય— $\angle અ = \angle બ$; અને $\angle ક = \angle ડ$.

સિદ્ધતા— \therefore કમઢ એક સીધી લીટી છે, અને અમ તે પર પડે છે;

$$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨ \text{ કાટખુણા.} \quad (પ્ર૦ ૧)$$

\therefore અમઢ એક સીધી લીટી છે, અને ઢમ તે પર પડે છે;

$$\therefore \angle બ + \angle ક = ૨ \text{ કાટખુણા.} \quad (પ્ર૦ ૧)$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ક.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle ક$ સાધારણ કાઢી લીધો;

$$\therefore \text{શેષ } \angle અ = \text{શેષ } \angle બ.$$

તેજ પ્રમાણે $\angle ક = \angle ડ$ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

($\angle ક = \angle ડ$) એ સિદ્ધ કરો.

૩જ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો કાટખુણાના ભુજોને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની* બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા જ ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. અમઢ અને ઢમક એ લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે. મય \angle અમઢને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે મય વધારી હોય તો તે \angle કમઢને દુભાગે છે.

*જો બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તો તેમનું મેલનબિંદુ કહે છે.

પ્રમેય ૧થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને ૩ સિદ્ધ કરો.

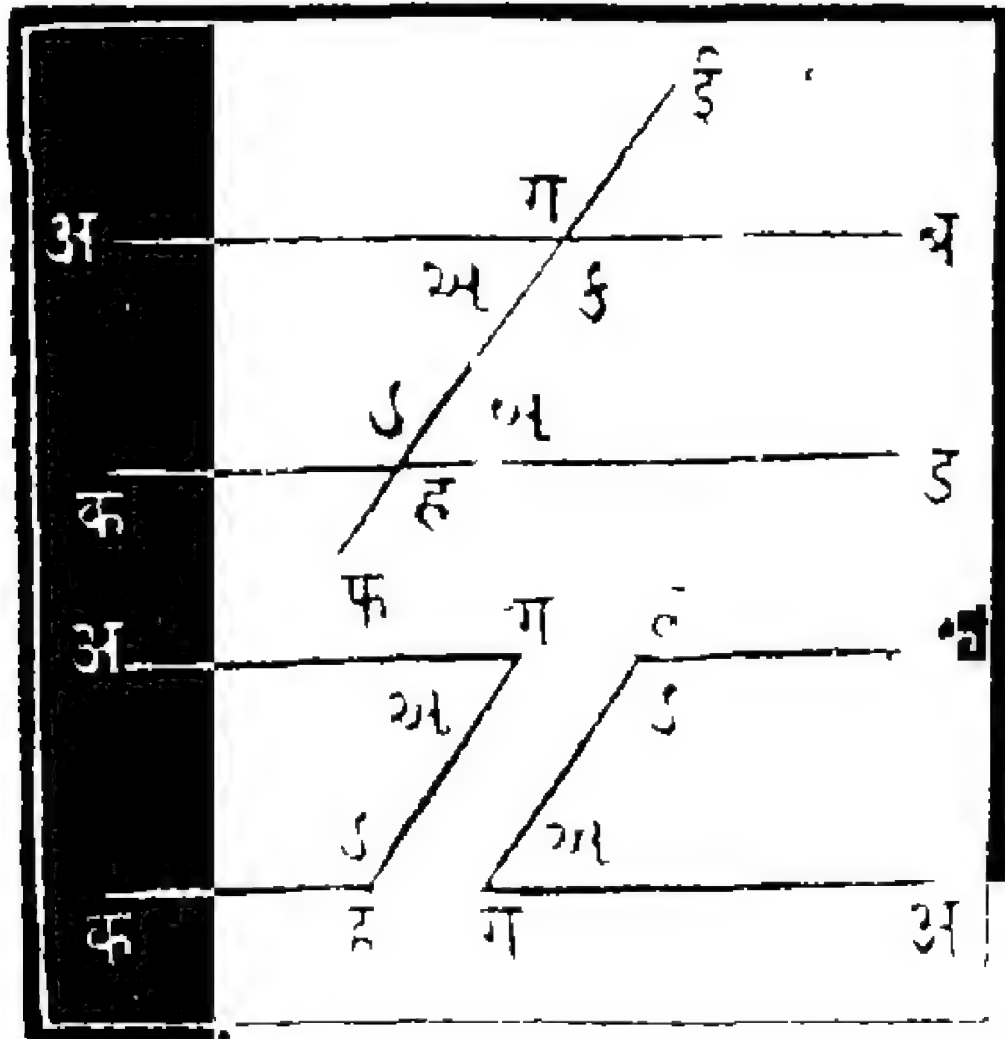
૨. એક બીજીને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. મ ગિદ્ધમાંથી મઅ, મવ, મક, મહ, આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle અમવ = \angle કમહ, અને \angle વમક = \angle અમહ; તો અમ અને મક, તેમજ વમ, અને મહ લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોગિદ્ધમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે, અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને છેદે અને બ્યુતક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કહ લીટીઓને ફેફ લીટી ગ અને હ બિંદુઓમાં છેદે છે, અને $\angle અ$ અને $\angle બ$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—અવ || કહ.

સિદ્ધતા—

$$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨ કાટખુણા, \quad (પ. ૧)$$

$$\text{અને } \angle બ + \angle ડ = ૨ કાટખુણા, \quad (પ. ૧)$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ડ.$$

$$\text{પણ } \angle અ = \angle બ, \quad (પક્ષ)$$

$$\therefore \angle ક = \angle ડ.$$

અગ્રહક આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો) અને તે અગ્રહક આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે હ બિંદુ ગ પર પડે, અને હક, ગવની દિશામાં પડે,

તો $\therefore \angle ડ = \angle ક$, (ઉપર સિદ્ધ થયું છે.)

\therefore હગ, ગહની દિશામાં પડશે.

અને \therefore હગ = ગહ,

\therefore ગ બિંદુ હ બિંદુ પર પડશે.

હવે $\therefore \angle અ = \angle બ$,

\therefore ગઅ, હહની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે ગવ અને હહ જે દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં હક અને ગઅ પડે છે.

હવે અવ, કહ લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ પણ એક બાજુએ મળવી જોઈએ. તે વ અને હની બાજુએ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી હક, ગઅ એ લીટીઓ પણ અ અને ક તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ. પણ જો અવ, કહ એ અ, ક તરફ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમની અને ગવ, હહની દિશા એકજ હોવાથી ગવ અને હહ પણ વ, હ તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ (એટલે કે અવ અને કહ બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જો બે સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તે જો બંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે બે સીધી લીટીઓ જંગમ ઘેરી લે છે, પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૦૯મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે અબ,કઢ કોઈ પણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

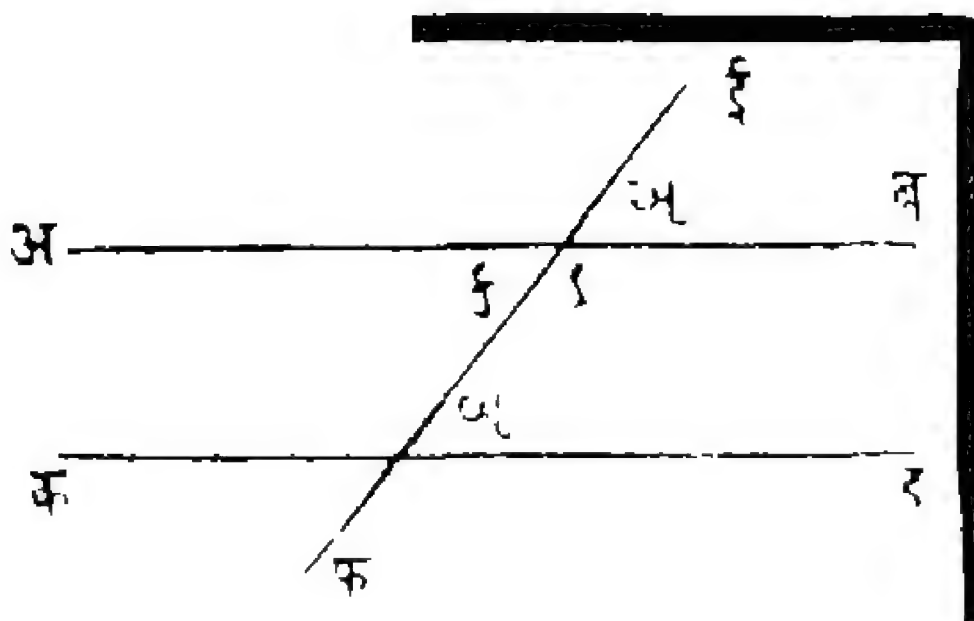
૪થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

૧. અબકઢ એક ચતુષ્કોણ છે અને અક તેનો કર્ણ છે. જો \angle અકબ બરાબર \angle અકઢ, અને \angle કઢઅક = \angle અકબ, તો અબકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

- (૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા
- (૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) પક્ષ—અબ અને કઢ લીટીઓને ફક છેદે છે, અને સંગત ખુણા અ અને બ બરાબર છે.

સાધ્ય—અબ ॥ કઢ.

સિદ્ધતા—

$$\begin{aligned} \angle \alpha &= \text{સામેનો } \angle \delta; & (\text{પ્ર. ૩}) \\ \text{પણ } \angle \alpha &= \angle \beta, & (\text{પ્રકા}) \\ \therefore \angle \beta &= \angle \delta. \end{aligned}$$

અને $\therefore \angle \beta$ અને $\angle \delta$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,
 \therefore અથવા કહ (પ્ર. ૪)

(૨) પક્ષ—ઈફ લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા β અને δ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—અથવા કહ.

સિદ્ધતા—

$$\begin{aligned} \therefore \text{અથવા એક સીધી લીટી છે અને ફર્ફ મળે છે,} \\ \therefore \angle \delta + \angle \epsilon &= 2 \text{ કાટખુણા.} & (\text{પ્ર. ૧}) \end{aligned}$$

$$\text{પણ } \angle \beta + \angle \epsilon = 2 \text{ કાટખુણા.} & (\text{પક્ષ})$$

$$\therefore \angle \delta + \angle \epsilon = \angle \beta + \angle \epsilon.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle \epsilon$ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો;

$$\therefore \angle \delta = \angle \beta.$$

અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

$$\therefore \text{અથવા કહ.} & (\text{પ્ર. ૪})$$

પમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસેની આકૃતિમાં

(૧) જો $\angle \alpha = \angle \delta$ હોય,

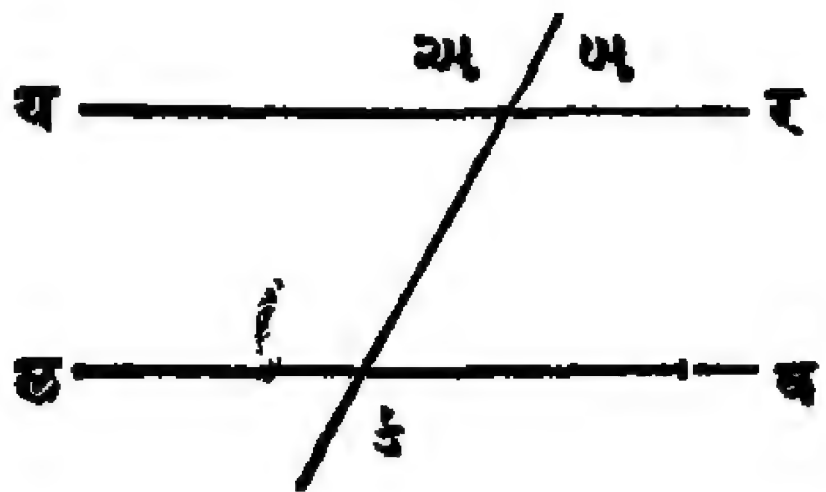
અથવા

(૨) $\angle \beta + \angle \delta = 2$

કાટખુણા હોય; તો

ચર ॥ લઘ છે એમ બતાવો.

૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક બીજાને સમાંતર હોય છે.



પ્લેકેરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજને છેદનારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજી સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, કહ, રૂંફ સીધી લીટીઓ એક બીજને હ િંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી કહ, અબને સમાંતર છે; તો રૂંફ, અબને સમાંતર હોઈ શકેજ નહિ. કારણ કે કહ લીટી અબને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે કે કહ અને અબની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે રૂંફ અને કહની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું નથી, ત્યારે રૂંફ અને અબ વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોઈ શકે નહિ. માટે રૂંફ, અબને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં યુક્તિવડનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:—

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

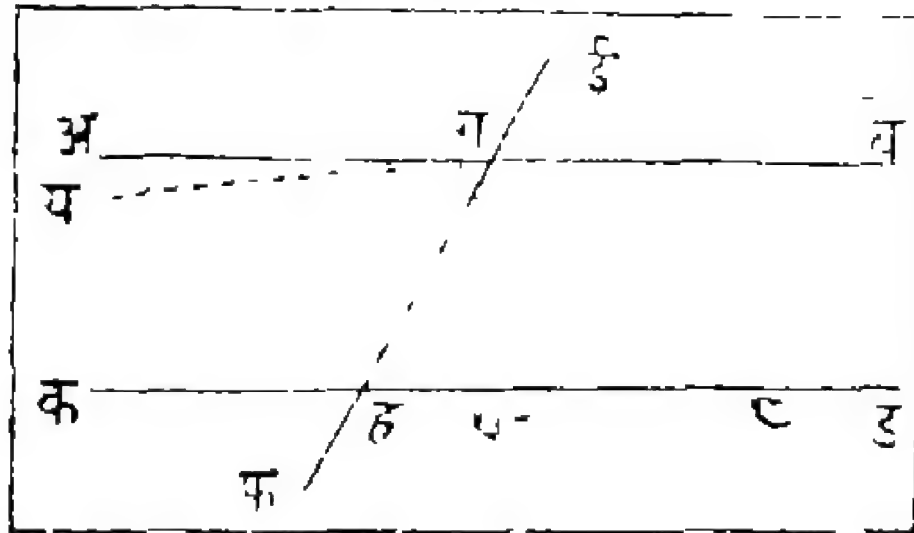
આ વિધાન ખરું જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

પ્રમેય ૬.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા કરે છે;

- (૨) સંગત ખુણાં સરખાં કરે છે; અને
 (૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પક્ષ—અબ અને કહ સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને ર્ફ તેમને ગ અને હમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) \angle અગહ અને \angle ગહહ એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે;
 (૨) \angle ઈગબ અને \angle ગહહ એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) ર્ફની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા \angle બગહ અને \angle ગહહ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો \angle અગહ અને \angle ગહહ સરખા ન હોય, તો એક ગય લીટી એવી દોરો, કે યગહ અને ગહહ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

(૧) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ યગહ = વ્યુત્ક્રમ \angle ગહહ, (રચના)

\therefore ગય \parallel કહ. (પ્ર. ૪)

પણ અબ \parallel કહ, (પક્ષ)

\therefore ગય અને અબ એ બંને કહને સમાંતર.

પણ એ અશક્ય છે, (ખેદેલું પ્ર. પ્ર.)

$\therefore \angle$ અગહ, \angle ગહહ, એ સરખા નથી એમ માની શકાતું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે \angle વગહ = \angle ગહક એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

\angle ઈગવ = સામેનો \angle અગહ, (પ્ર. ૩)
અને \angle અગહ = \angle ગહહ, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)
 $\therefore \angle$ ઈગવ = \angle ગહહ.

(એજ પ્રમાણે \angle ઈગઅ = \angle ગહક.)

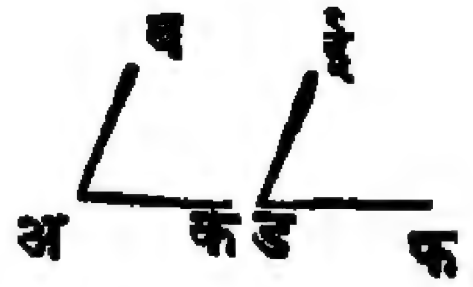
(૩) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અગહ = \angle ગહહ, (પ્ર. ૬, ભાગ ૧)
અને \angle વગહ, \angle અગહનો ન્યૂનતાપૂરક છે.
 $\therefore \angle$ વગહ, ગહહનો પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

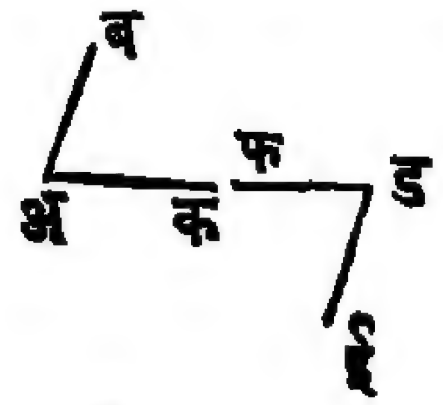
ઉપસિદ્ધાંત—જે બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છે:—

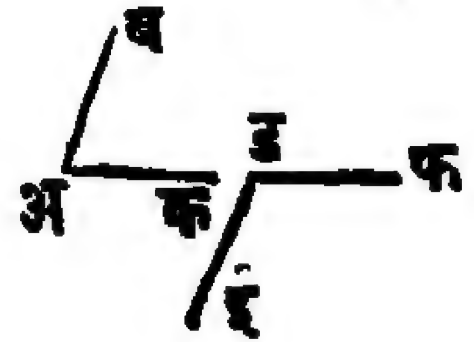
(૧) જો \angle વઅક અને \angle ઈહફની બાજુઓ સમાંતર હોય અને એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



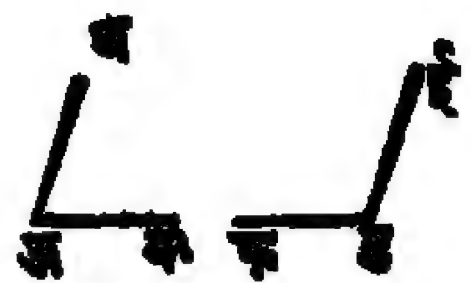
(૨) જો \angle વઅક અને \angle ફહઈની બાજુઓ સમાંતર હોય અને તે સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) હવે, અક એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને હઈ, અવ સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાબતમાં ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.



(૪) જો હવે, અક સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને હઈ, અવ એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોવા જોઈએ.



૬૬૧ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં $\angle \text{અ} = \angle \text{ક}$, અવક પાયાને સમાંતર ઢાંચ દોરેલી છે; તો $\angle \text{અઢાંચ} = \angle \text{અઈઢાંચ}$ એ સિદ્ધ કરો.

૨. §* જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. *સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેનાં પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાજુએ ત્રિકોણની બે બાજુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. ખાલી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જે એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી લીટીની એકજ બાજુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાજુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેનો સાંકડો ખુણો, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકબેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળો ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના ભુજો બીજાના ભુજો ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

§* આ ચિન્હ જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છાડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો વિશેષ સંભવ છે એમ જણવું.

૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લીટીથી ચતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને મળવાથી કાટખુણુ ચોખુણુ બને છે.

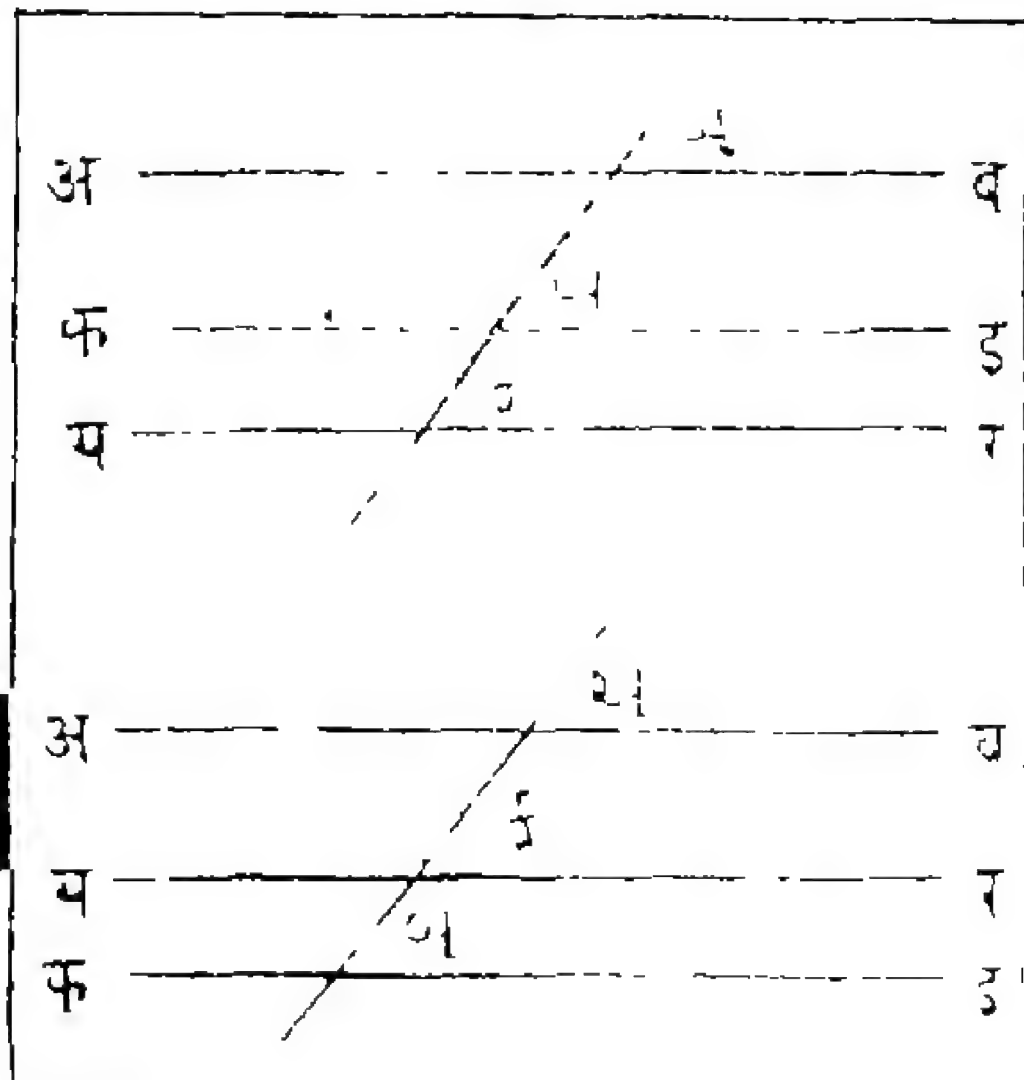
૧૦. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અથવા ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી બક પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાને સરવાળો બે કાટખુણા થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. અથવા અને કહ એ સમાંતર સીધી લીટીઓને વ અને દ બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાજુ પરના વ અને દ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખત મવ અને એક વખતે મદમાંથી વાળીને મ બિંદુ પદ, અથવા, અને કહથી સરખે અંતરે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

બે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે, તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અથ અને કહ ॥ ચર

સાધ્ય—અથ ॥ કહ.

રચના—અથ, કહ, અને ચરને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.
(\angle અ, \angle બ, \angle ક, આ સંગત ખુણા છે.)

સિદ્ધતા— \therefore અથ ॥ ચર, (પક્ષ.)

$$\therefore \angle$$
અ = સંગત \angle ક. (પ્ર. ૬)

તેમજ \therefore કહ ॥ ચર, (પક્ષ)

$$\therefore \angle$$
બ = સંગત \angle ક. (પ્ર. ૬)

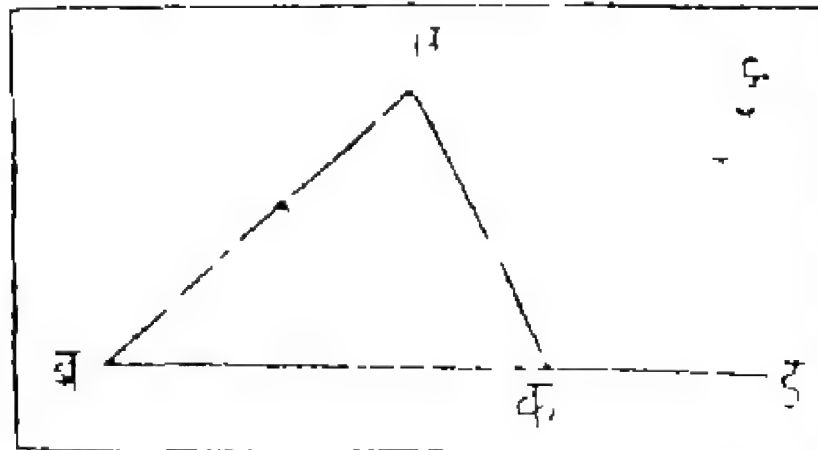
$$\therefore \angle$$
અ = \angle બ.

\therefore આ ખુણા સંગત છે,

$$\therefore$$
 અથ ॥ કહ. (પ્ર. ૫)

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની
અસખર હોય છે.



પક્ષ—અથક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય— \angle અ + \angle બ + \angle ક = ૨ કાટખુણા.

રચના—બકને હ સુધી વધારો. કમાંથી બઅ ॥ કઈ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને અક છેદે છે,

$$\therefore \angle$$
અ = બ્યુતકમ \angle અકઈ. (પ્ર. ૬)

અને \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને બહ છેદે છે,

$\therefore \angle \text{બ} = \text{સંગત } \angle \text{ઈકઢ.}$ (પ્ર. ૬)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકઢ.}$

દરેક બાજુમાં $\angle \text{અકબ}$ ઉમેરો.

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકઢ} + \angle \text{અકબ.}$

પણ $\angle \text{અકબ} + \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકઢ} = ૨$ કાટખુણા, (કારણ કે બકઢ એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = ૨$ કાટખુણા.

એટલે અથક ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણોને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

આ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન,

૧. અથક ત્રિકોણમાં $\angle \text{બ} = \angle \text{ક}$ છે; જમને અ તરફ ૬૦° સુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે $\angle \text{કઝઢ}$, $\angle \text{બ}$ અથવા $\angle \text{કનો}$ બમણો છે.

૨. કાટપુણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સામીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમઘાળુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના બે તૃતીયાંશ ખરાબર હોય છે.

૪. અઢબ ત્રિકોણના અ અને ઘ ખુણાને દુભાગનારી ક્ષીટીઓ દ્વારા મળે છે; તો અઢબ ખુણો પહેળો છે એ સિદ્ધ કરો.

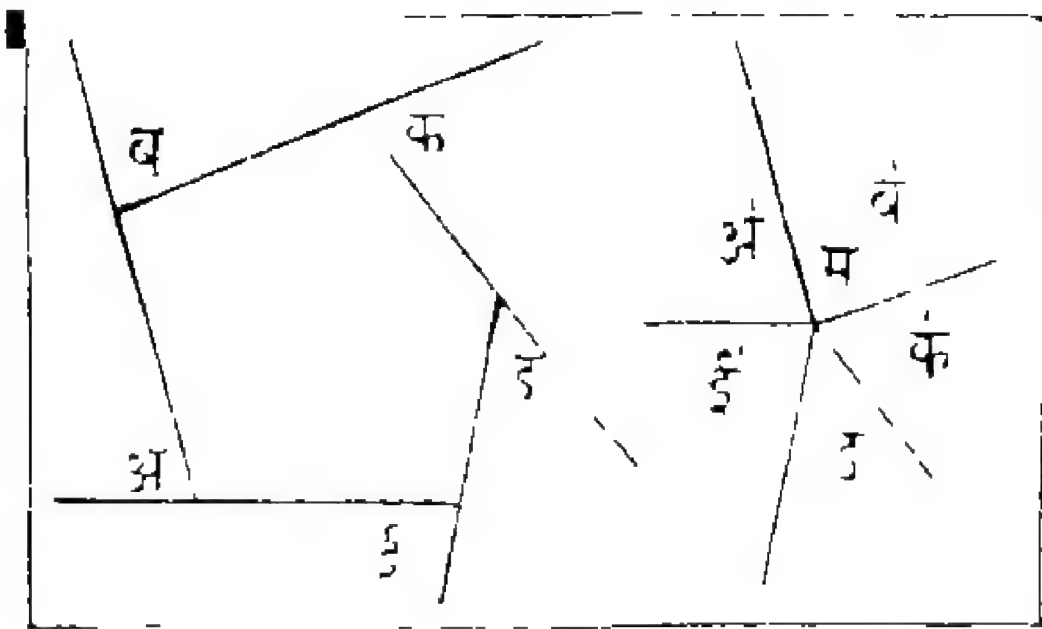
૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો; અને એનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહેળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. કાટપુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે બે ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટપુણ ત્રિકોણના ખુણાની ખરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધીક્ષીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા ખરાબર હોય છે.



*બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય અથવા અંદરની બાજુથી અંતર્વક હોય, એવી.

પક્ષ—અવકર્ણ આ બહિર્વક સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e$, આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય— $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4$ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કાઠિપણુ મ બિંદુ ભા. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તોપણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાજુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાજુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાંથી દોરો.

સિદ્ધતા—

$\therefore \angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e$ ની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે $\angle a', \angle b', \angle c', \angle d', \angle e'$, આ ખુણા છે.

$\therefore \angle a = \angle a', \angle b = \angle b', \angle c = \angle c', \angle d = \angle d', \angle e = \angle e'$.
(જૂઠા પ્રમેયનો ઉપસિદ્ધાંત)

$\therefore \angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = \angle a' + \angle b' + \angle c' + \angle d' + \angle e'$.

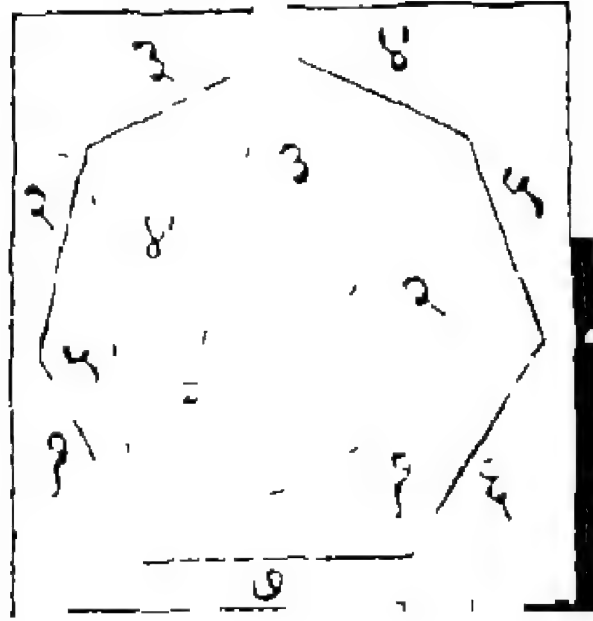
અને $\therefore \angle a' + \angle b' + \angle c' + \angle d' + \angle e' = 4$ કાટખુણા, (પ્ર.૧, ઉપ.)

$\therefore \angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4$ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—સ બાજુની સીધીલીટીવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો (૨ સ-૪) કાટખુણા થાય છે.

હમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય હતો આધાર લીધા સિવાય ઉપરો ઉપસિદ્ધાંત, એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકોણ બનાવીને, સિદ્ધ કરો. (નીચેની આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકોણની સંખ્યા ૨ થાય છે.



૨. એક ત્રિકોણની અવ, વક્ર, કઞ્ઞ આગુઓ વધારવાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા પૈકી બે ખુણાને સરવાળો બે બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો કે કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. અંબક ત્રિકોણમાં અઢ, વઢ, કફ એવી દોરી છે, કે તેઓ અવ, વક્ર, કઞ્ઞની સાથે ઢઅવ, ઢવક, કફઅ ખુણા સરખ કરે છે. હવે બે અઢ, વઢ, કફ એક બિંદુમાં ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના ખુણા અંબક ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. અંબકઢઢ એક પંચકોણ છે, અને એની કે.ઈ પણ આગુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ આગુઓ જંને તરફ વધારી હોય, તો ફ, ગ, હ, વ, ળ બિંદુઓમાં મળે છે; તો ફ, ગ, હ, વ, ળ ખુણાઓને સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

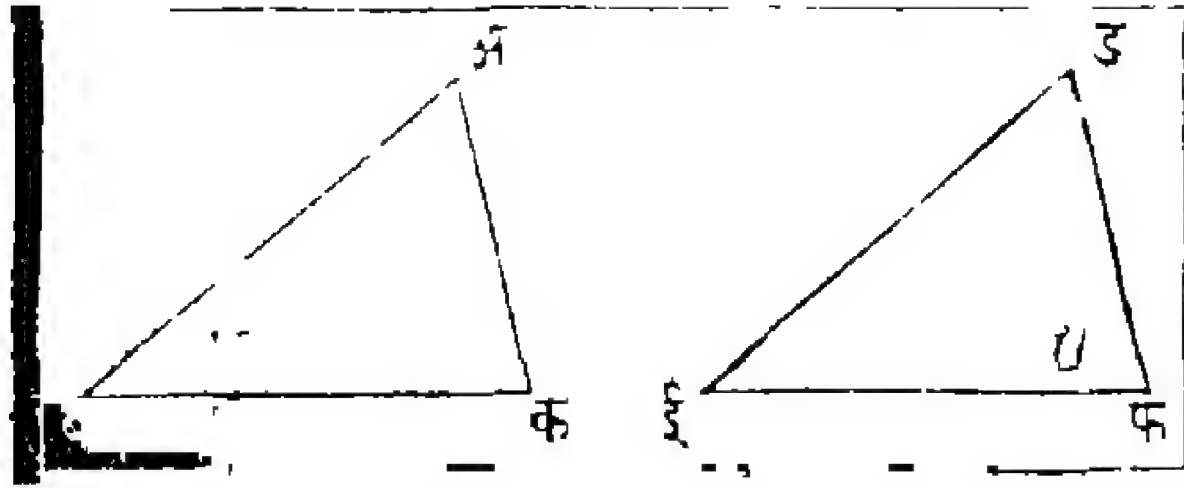
૫. જોમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે 60° , 30° , 45° , હોય એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને આગુ કેટલી?

૬. જોનો એક બહારનો ખુણો 95° , 7° , 11° , 1° , 5° અથવા 80° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે?

૭. જોનો અંદરનો ખુણો 100° , 120° , 130° , 144° , અથવા 60° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને હર્ફ ત્રિકોણમાં અવ=હર્ફ, અક=હફ, અને $\angle અ = \angle હ$.

સાધ્ય— $\triangle અવક = \triangle હર્ફ$.

સિદ્ધતા—

$\triangle અવક$ ને $\triangle હર્ફ$ પર એવી રીતે મૂકો, કે અ બિંદુ હ પર પડે, અને અવ બાજુ હર્ફની દિશામાં પડે.

$\therefore અવ = હર્ફ,$

\therefore બ શિરોબિંદુ હ પર પડે છે, (પક્ષ)

અને $\therefore \angle અ = \angle હ,$ (પક્ષ)

\therefore અક, હફની દિશામાં પડે છે.

અને $\therefore અક = હફ,$ (પક્ષ)

\therefore ક શિરોબિંદુ ફ પર પડે છે.

$\therefore \triangle અવક, \triangle હર્ફ$ પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો અવ અને હર્ફ સીંચી લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે દુભાવે, તો અકબહ આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની અવ અને અક સરખી બાજુઓમાં જ અને ચ બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે અક્ષ = અચ; તે એમ સિદ્ધ કરો કે કક્ષ = વચ છે અને કક્ષ અને વચ, વક સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. *જો અવ અને કઢ સીધી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે, તો અવકઢ આકૃતિ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ થાય.

૪. *અવક ત્રિકોણના વક પાયાનું જ મધ્યબિંદુ છે. અ અને જ સાંધો, અને અઢને જ સુધી એવી રીતે વધારો, કે જઈ = અઢ થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે અવ = જક, અને અક ॥ જવ

૫. અવકઢ એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં અવ = કઢ, અઢ = વક, અને $\angle અ = \angle ક$ છે; તે અવકઢ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. *ચોરસનો કોણ જે ખુણાઓમાં ચર્ધને જાય છે તેમને દુભાગે છે અને ચોરસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરો.

૭. *સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકોણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૮. *ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુનાં મધ્યબિંદુમાંથી તે બાજુઓ પર દોરેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૯. *લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બંને છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૦. અવકઢ અને ચરલજ ચતુષ્કોણોમાં અવ = ચર, વક = રલ, કઢ = લવ, $\angle વ = \angle ર$, અને $\angle ક = \angle લ$; તે આ આકૃતિએ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૧. *અવ અને કઢ લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તે અક અને વક સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવો.

૧૨. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંના એક ત્રિકોણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલો છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરો કે તે ત્રિકોણોમાંના એકનાં શિરોબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

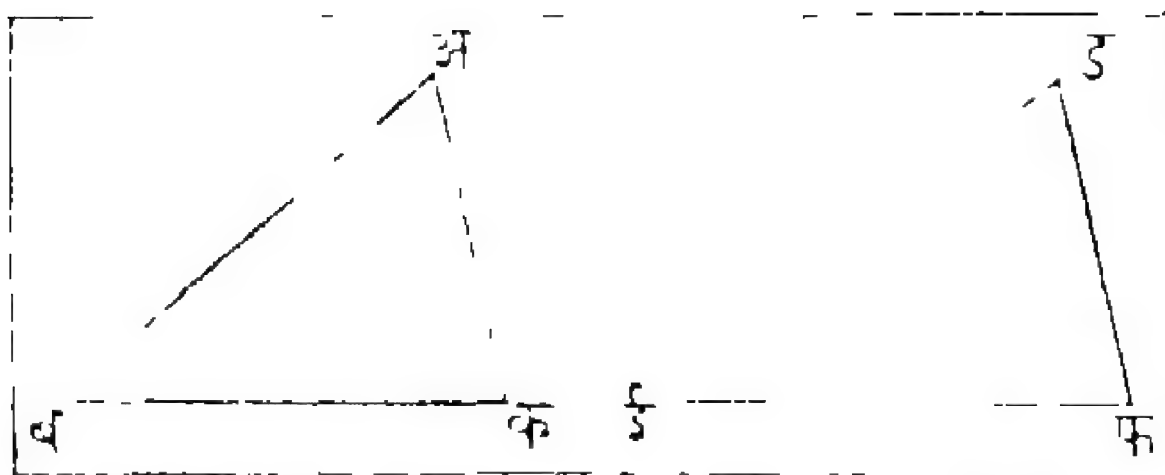
૧૩. અથવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનાં અથવા અને એક બાજુ પર અથવા અને એક જ એવા સમબાજુ ત્રિકોણ બહારની બાજુએ દોરેલા છે; તો કહ = બજ એ સિદ્ધ કરો.

૧૪. અથવા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની અથવા અને એક બાજુ પર બહારની બાજુએ અથવા અને એકલમ ચોરસ દોરેલા છે; તો બમ = કજ એ બતાવી આપો.

૧૫. અથવા ચોરસમાં મ બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. મજ પર અડની બાજુએ અમરફ ચોરસ દોર્યો છે; તો બમ = ડફ એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજાના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાજુ તેને મળતી આવતી બીજાની એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧લો—

પક્ષ—અથવા અને ડરફ આ બે ત્રિકોણમાં $\angle બ = \angle ઈ$, $\angle ક = \angle ફ$, અને બક = ઈફ (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાજુઓ.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

\triangle અવક, \triangle ડઈફ પર એવી રીતે મૂકો, કે વ, ફ પર પડે, અને વક, ફની દિશામાં પડે.

હવે \therefore વક=ફ, (પક્ષ)

\therefore ક, ફ પર પડે છે,

અને \therefore \angle વ= \angle ઈ અને \angle ક= \angle ફ, (પક્ષ)

\therefore વઅ, કઅ અનુક્રમે ફડ, ફડની દિશામાં પડે છે.

\therefore અ, ડ પર આવી રહે છે.

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

પ્રકાર રજો—

પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં \angle વ= \angle ઈ, \angle ક= \angle ફ, અને અવ=ડઈ (બંને ત્રિકોણોમાંના એકેક સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા— \angle અ+ \angle વ+ \angle ક = ૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૮)

\angle ડ+ \angle ઈ+ \angle ફ = ૨ કાટખુણા,

"

\therefore \angle અ+ \angle વ+ \angle ક= \angle ડ+ \angle ઈ+ \angle ફ.

પણ \angle વ+ \angle ક= \angle ઈ+ \angle ફ.

(પક્ષ)

\therefore શેષ \angle અ=શેષ \angle ડ.

હવે અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

\therefore \angle અ= \angle ડ,

\angle વ= \angle ઈ

અને અવ = ડઈ;

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ. (પ્ર. ૧૧. પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણુ ત્રિકોણુ પૈકી એકનો ઠણું અને એક સાંકડો

પુણે ખીજ ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક પુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણના સરખા પુણાનાં શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. અથવા ત્રિકોણમાં $\angle બ = \angle ક$; તો બ અને ક પુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મોનો ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * અથવા ત્રિકોણમાં $\angle બ = \angle ક$; તો બ અને ક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * પુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પુણાના સુજોથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * અથવા ત્રિકોણના બ અને ક પુણાને દુભાગનારી ઘમ અને કમ લીટીઓ મ બિંદુમાં મળે છે. બક, કઅ, અબ પર અનુક્રમે મચ, મર, મલ લંબ દોરેલા છે; તો મચ = મર = મલ એ સિદ્ધ કરો.

૮. ગ અને હ એક ખીજને છેદનારી લીટીઓ છે, અને ચ એક ત્રીજી લીટી છે. ચમાં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે ગ અને હથી સરખે અંતરે હોય. આ વાત ક્યારે અશક્ય હોય છે ?

૯. પચરસ ચતુષ્કોણનો પર કર્ણ $\angle પ$ અને $\angle ર$ ને દુભાગે છે; તો $\triangle પચર \equiv \triangle પસર$ એ સિદ્ધ કરો.

૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું અથવા લંબાંતર કમાં દુભાગેલું છે. ક બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને પ અને જ બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે; તો કપ = કજ એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અથવા એક ચતુષ્કોણ છે, અને જહ પર અર્ધ અને

કફ લંઘ દોરેલા છે. હવે જો અઈ, કફ બરાબર હોય, તો ચઢ, અકને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કણ એક બીજને દુભાગે છે.

૧૪. અથકઢ એક ચતુષ્કોણ છે, અને અક કર્ણ \angle અ, \angle કને દુભાગે છે; તો અક, બીજ કર્ણ ચઢની સાથે કાટખુણે કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. અથ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો અ અને ચમાંથી આ લીટી પર દોરેલા લંઘ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. અથ લીટી પર અ અને ચ હેડા આગળ વિરૂદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને અથના મધ્યબિંદુ કમાં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે ઢ અને ફમાં મળે છે, તો અઢ=ચફ, અને કઢ=કઈ એ સિદ્ધ કરો.

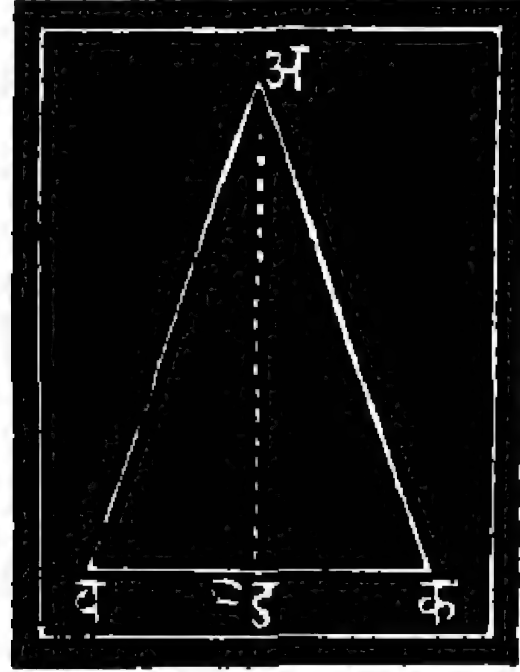
૧૭. એક વર્તુળની કઅ અને કચ ત્રિજ્યાઓ એક બીજ પર લંઘ છે. અમ અને ચન તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંઘ છે; તો અમ=કન અને ચન=કમ એમ બતાવી આપો.

૧૮. અથકઢ ચતુષ્કોણના અ,ચ,ક,ઢ ખુણા અનુક્રમે ફફગઢ ચતુષ્કોણના ફ,ફ,ગ,ઢ ખુણાની બરાબર છે; અથ, કઢ અનુક્રમે ફફ, ગઢની બરાબર છે; અને અઢ, ચક લીટીઓ એવી છે કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. અથક ત્રિકોણનાં અ,ચ,ક, શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે ચક, કચ, અથ બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ ઢ,ફ,ફ બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે ઢફફ ત્રિકોણની બાજુઓનાં અ,ચ,ક મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અથક ત્રિકોણ છે, અને તેમાં અબ=અક.

સાધ્ય— $\angle ક = \angle બ$.

રચના— $\angle બ$ અને $\angle ક$ બંને દુભાગનારી અડ દોરો. ધારો કે તે દોરો મળે છે.

સિદ્ધતા—

\therefore અથક અને અકક ત્રિકોણોમાં—

અબ=અક,

(પક્ષ)

અડ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે,

$\angle બઅડ = \angle કઅડ$;

(રચના)

$\therefore \triangle અથક = \triangle અકક$.

(૫-૧૦)

$\therefore \angle ક = \angle બ$.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો 60° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેના બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. અબક અને ડબક આ બે સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ એકબી પાયા બક પર છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે; તો \angle અબક = \angle અકડ એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો બકની સામસામી બાજુએ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ+સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય તો સામસામી ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધાં હોય તો તે ત્રિકોણ કાટખુણ ત્રિકોણ હોય છે

૮. * સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દુભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાના મધ્ય બિંદુમાંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦ * સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામીબાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

+ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા—આનો અર્થ ૧૫૪મા પાના પર આપ્યો છે.

૧૩. સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

૧૪. *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યા હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. અથવા ત્રિકોણમાં અથ=અક; \angle અ અને \angle કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તા મથ, \angle બને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

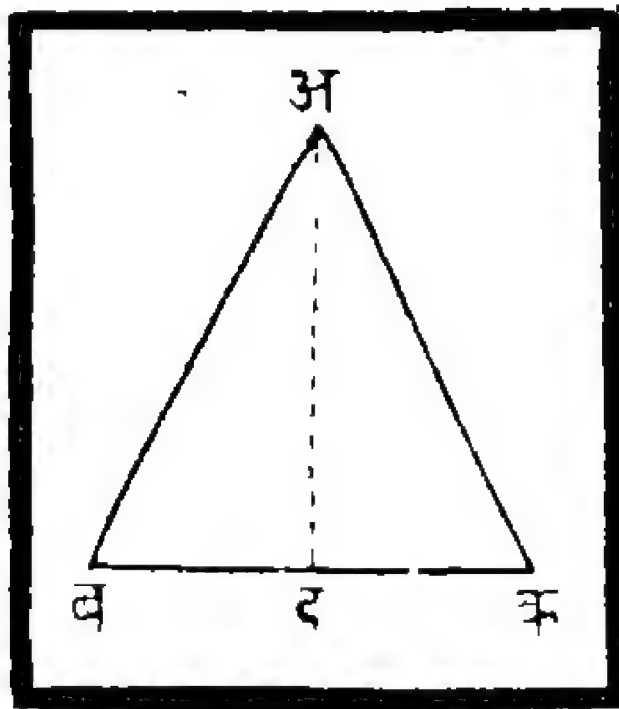
૧૭ * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. અથવા સમબાજુ ત્રિકોણની અથ અને અક બાજુઓ પર અથડ, અકડ સમબાજુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો અથ, અક એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. અથ, એક અર્ધ વર્તુળનો વ્યાસ છે, અને પ પરિધ પર મમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો અથ ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં $\angle વ = \angle ક$.

સાધ્ય—અક = અવ.

રચના—અવક ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે વકને ઢમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—અવક અને અકક ત્રિકોણમાં—

$$\angle વ = \angle ક, \quad (\text{પક્ષ})$$

$$\angle વઅક = \angle કઅક, \quad (\text{રચના})$$

અક સાધારણ છે;

$$\therefore \triangle અવક \equiv \triangle અકક. \quad (\text{પ. ૧૧})$$

$$\therefore અક = અવ.$$

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણના બે બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાંચો એ ત્રણ મળીને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં અવ = અક અને વ ને કમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ ક્ષમાં મળે છે; તો ક્ષવ = ક્ષક એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં અવ = અક, અને $\angle વ$ તથા $\angle ક$ ને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મઅ, \angle અને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતા સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૬. અવકકક ચતુષ્કોણમાં અવ = અક, અને $\angle વ = \angle ક$; તો કવ = કક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં વ,વ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે $\angle વઅવ = \angle કઅવ$ છે. જો અવ = અવ હોય તો અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવકઢ ચતુષ્કોણના અ અને ઘ ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને અઘ ॥ કઢ છે; તો અઢ ॥ ઘક એ સિદ્ધ કરો.

૯. અવક ત્રિકોણમાં $\angle ઘ = \angle ક = 2\angle અ$, અને $\angle ઘ$ ને દુભાગનારી લીટી અકને ઢમાં મળે છે; તો અઢ = ઘઢ = ઘક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. અવક સમબાજુ ત્રિકોણની ઘક, કઅ, અઘ બાજુઓ પર અનુક્રમે ઘકઢ, કઅઈ, અઘફ સમબાજુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો $\angle ઢ$, $\angle ઈ$, $\angle ફ$ એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવક ત્રિકોણની અઘ અને અક બાજુઓમાં ઢ અને ઈ બિંદુઓ એવી રીતે લો, કે ઢઈ, ઘકને સમાંતર થાય; અને ઘઢની બરાબર થાય.

૧૨. અવક ક્રાટખુણુ ત્રિકોણના અક કર્ણમાં ઢ બિંદુ એવું લીધું છે, કે $\angle ઢકઘ = \angle ઢઘક$ છે; તો બતાવી આપો કે $\angle ઢકઘ = \angle ઢઘ$.

૧૩. *ક્રાટખુણુ ત્રિકોણના ક્રાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે, એ ઉપલા પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

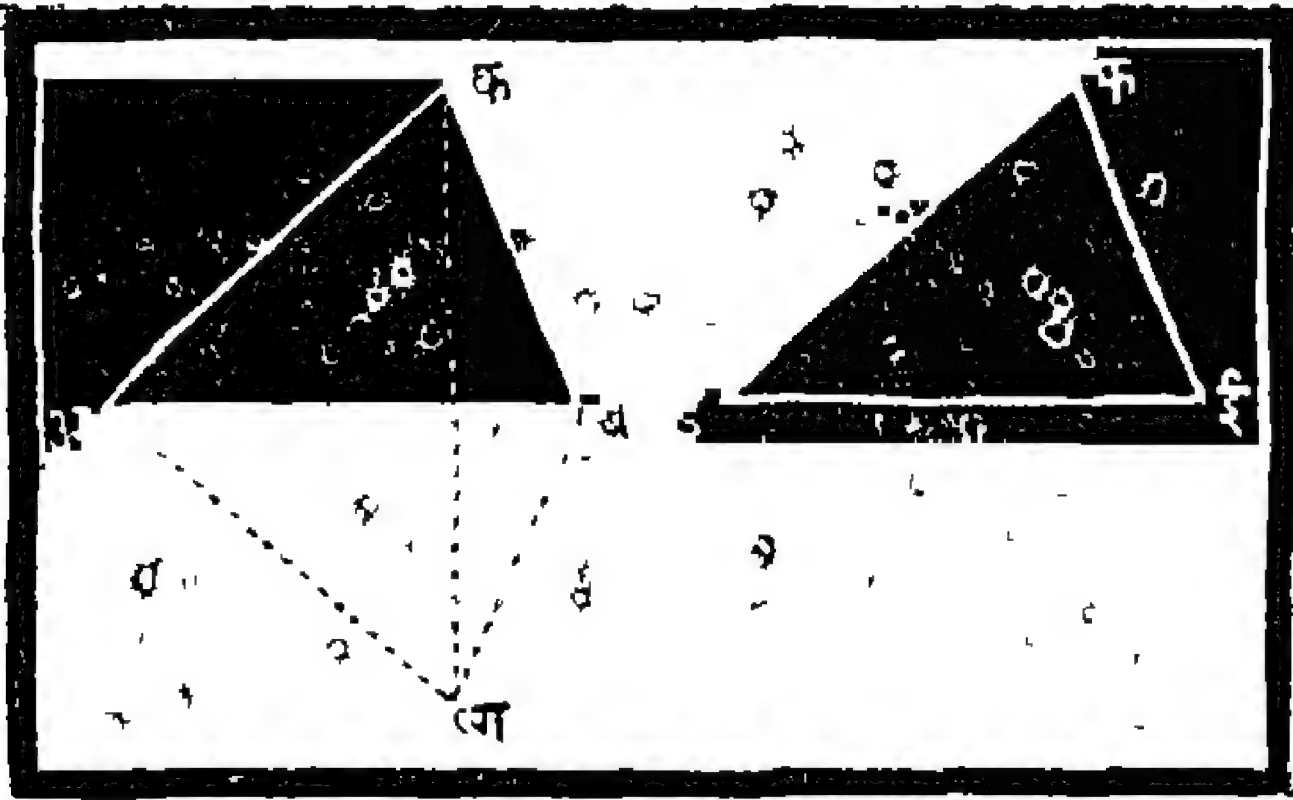
૧૪. *કોઈ પણ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૧૫. અવક ત્રિકોણના ઘક પાયામાં (જરૂર પડે તો પાથો વધારીને) એવું એક બિંદુ લો, કે તેનું અ અને કથી અંતર સરખું હોય.

૧૬. આપેલી લીટીમાં એક અ બિંદુ છે; અને તે લીટીની બહાર એક ઘ બિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક ક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) ઘક અને કઅનો સરવાળો એક આપેલો લીટીથી મોટો થાય; (૨) ઘક અને કઅની બાદબાકી એક આપેલી લીટી બરાબર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અવ = ડઈ, અક = ડફ,
અક = ડફ.

સાધ્ય— Δ અવક \equiv Δ ડઈફ

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ અવ છે.

Δ ડઈફ ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો કે તેનું ડ શિરોબિંદુ અ પર પડે, ડઈ પાંચો અવની દિશામાં પડે, અને ફ શિરોબિંદુ કથી વિરુદ્ધ દિશામાં પડે.

\therefore અવ = ડઈ, (પક્ષ)

\therefore ઈ, અ પર પડશે.

ધારો કે ફ શિરોબિંદુ ગ સ્થાનમાં પડે છે.

ક, ગ સાંધો

હવે \therefore અક = ડફ, અને ડફ = અગ, (પક્ષ અને રચના)

\therefore અક = અગ.

$\therefore \angle$ અકગ = \angle અગક. (પ. ૧૨)

અને \therefore $\text{વક} = \text{ઈફ}$ અને $\text{ઈફ} = \text{વગ}$, (પક્ષ અને રચના)

\therefore $\text{વક} = \text{વગ}$.

\therefore $\angle \text{વકગ} = \angle \text{વગક}$. (પ. ૧૨)

\therefore $\angle \text{અકગ} + \angle \text{વકગ} = \angle \text{અગક} + \angle \text{વગક}$.

\therefore $\angle \text{અકવ} = \angle \text{અગવ}$.

પણ $\angle \text{અગવ}$ એટલે $\angle \text{ઢફઈળ}$ છે,

\therefore $\angle \text{અકવ} = \angle \text{ઢફઈ}$.

હવે \therefore અવક અને ઢઈફ ત્રિકોણમાં-

$\text{અક} = \text{ઢફ}$, (પક્ષ)

$\text{કવ} = \text{ફઈ}$ (પક્ષ)

$\angle \text{અકવ} = \angle \text{ઢફઈ}$;

$\therefore \triangle \text{અવક} \equiv \triangle \text{ઢઈફ}$ (પ. ૧૦)

૧૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં $\text{અવ} = \text{ઢઢ}$; $\text{કવ} = \text{કઢ}$; તો અક કઈ $\angle \text{અ}$ અને $\angle \text{ક}$ ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. *ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓ સરખી છે, અને વક પર વકઢ ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે $\text{વઢ} = \text{કઢ}$; તો ઢઢ , $\angle \text{વમક}$ ને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. ક્ષયજ્ઞ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ચ અને જ્ઞ આ સરખા ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે, તો બતાવી આપો કે મક્ષ, $\angle \text{ક્ષ}$ ને દુભાગે છે.

૫. અવ પાયાની સામસામી બાજુઓ અવક અને અવઢ આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે કઢ , અવ ને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. ઢઢની એક બાજુઓ ઈઢઅ અને ફઢઅ આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે ઈફ વધારી હોય તો તે ઢઢને કાટખુણે દુભાગે.

૭. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં અઢ = વક છે, અને અક અને વઢ ક્ષો સરખા છે, તો \angle અકઢ = \angle વઢક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. * સમઝાણુ ચતુષ્કોણના ક્ષો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને દુભાગે છે, અને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. અમઢ અને કમઢ આ સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે છે, અને અમકઈ તથા વમઢક એ સમઝાણુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે હૈફ લીટી મમાં થઈને જાય છે, અને અક, વઢને સમાંતર છે.

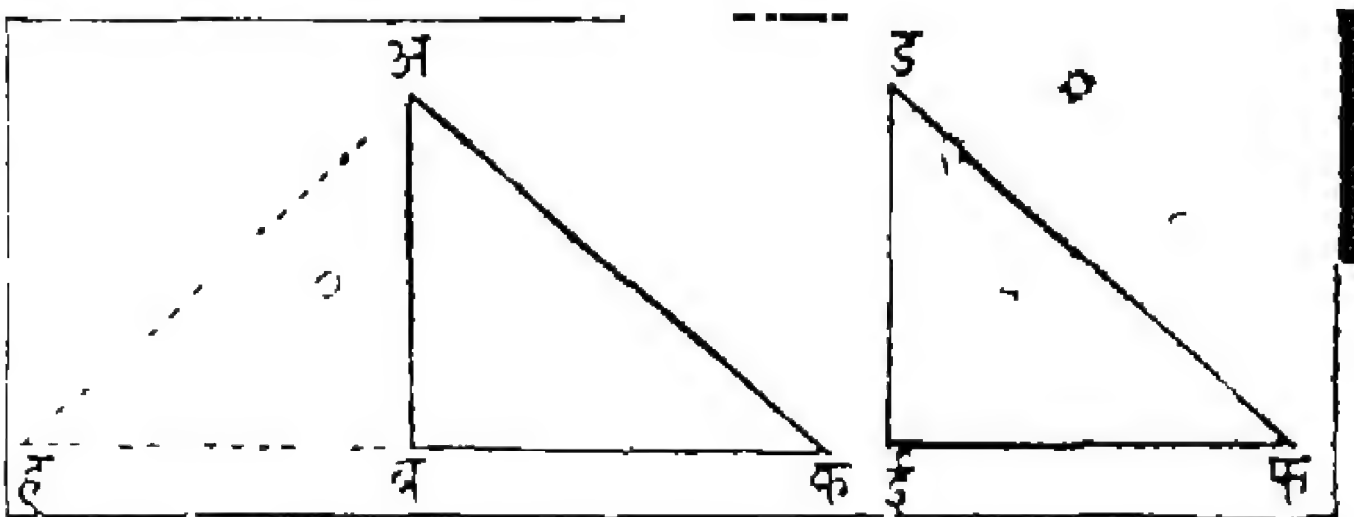
૧૦. અવક, અવઢ ત્રિકોણો અઢની એકજ બાજુએ છે. અક = વઢ, અઢ = વક, અને અઢ તથા વક, મમાં મળે છે; તો મઅક અને મવઢ ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (ઉપલ્લા ૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૯મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણુ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને હૈફ બે કાટખુણુ ત્રિકોણ છે; તેમના અક અને વક ક્ષો સરખા છે, અને અવ = હૈફ છે.

સાધ્ય— \triangle અવક = \triangle હૈફ.

સિદ્ધતા— \therefore અવ = ડઈ, (પક્ષ)

$\therefore \triangle$ ડઈફ એવી રીતે મૂકી શકાય કે ડ, અ પર પડે; ફ, વ પર પડે; અને ફ, કની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારે કે ફ, હ આગળ પડે છે.

હવે $\therefore \angle$ અવક = ૧ કાટખુણો, અને \angle અવહ = ૧ કાટખુણો; (પક્ષ)

$\therefore \angle$ અવક + \angle અવહ = ૨ કાટખુણા.

\therefore હવક એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

\therefore અહક ત્રિકોણમાં અક = અહ,

$\therefore \angle$ અહવ = \angle અકવ. (પ્ર. ૧૨)

પણ \angle અહવ એટલે \angle ડફઈન છે,

$\therefore \angle$ અકવ = \angle ડફઈ.

હવે અવક, ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

\angle વ = \angle ફ. (પક્ષ)

\angle ક = \angle ફ,

(ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

અવ = ડઈ; (પક્ષ)

$\therefore \triangle$ અવક \equiv \triangle ડઈફ.

(પ્ર. ૧૧)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * ખુણાના બે બુનેથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક; અને અહ, વક પર લંબ છે; તો \triangle અવક \equiv \triangle અકહ.

૩. જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

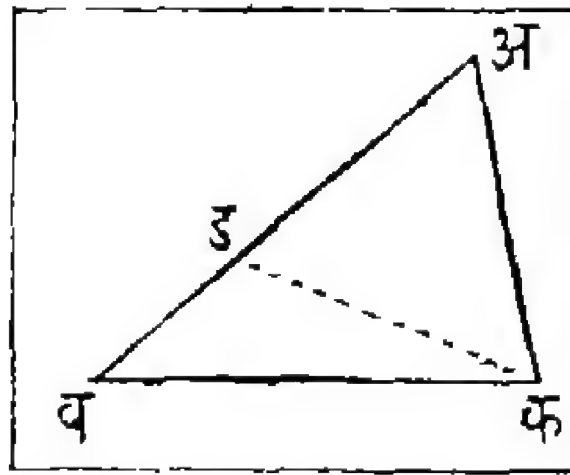
૪. * જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. * અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે અમ, અ ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા વ અને કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તેા અમ, \angle અકને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય, તેા મોટી બાજુની સામેનો ખુણો મોટો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં અવ > અક.

સાધ્ય— \angle ક > \angle વ.

રચના—અવમાંથી અક જેવડો અડ કકડો કાપી કાઢો. હક સાધો.

સિદ્ધતા—

\therefore અડક ત્રિકોણમાં અડ = અક, (રચના)

$\therefore \angle$ અકડ = \angle અડક. (પ્ર. ૧૨)

$\therefore \angle$ અડક એ અડક ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે

$\therefore \angle$ અડક > \angle વ. (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ \angle અડક = \angle અકડ,

$\therefore \angle$ અકડ > \angle વ.

અમે $\therefore \angle$ ક > \angle અકડ,

$\therefore \angle$ ક > \angle વ.

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ૧૬મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) કડ. \angle અને દુભાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) \angle અક.વ = $\frac{1}{2}$ (\angle ક - \angle વ); અને (૩) \angle અકડ = $\frac{1}{2}$ (\angle વ + \angle ક); એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

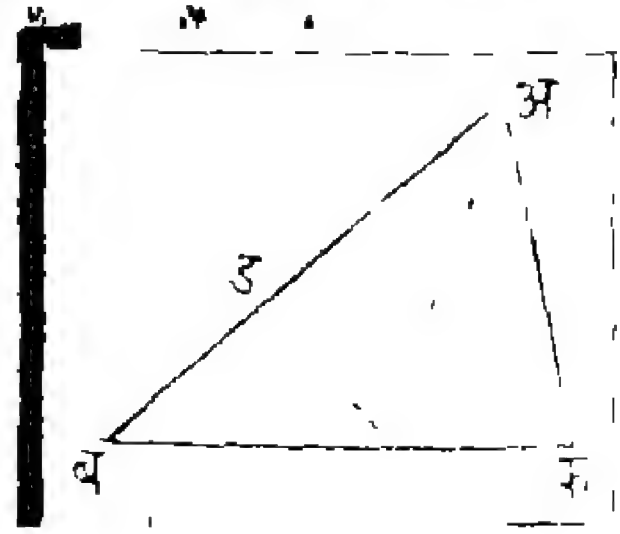
૨. અવકલ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં અવ > અલ; તે $\angle અલવ > \angle વલક$ એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની અવ, વલ, કલ, હલ બાજુઓ જો અનુક્રમે નાની થતી જાય તો $\angle કલઅ > \angle કલવ$, એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની પાસેના ખુણા હંમેશા સાંકડા હોય છે.

૫. અવકલ ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાજુ અવ છે, અને કલ સૌથી મોટી છે; તો $\angle વ > \angle હ$ અને $\angle અ > \angle ક$ છે. એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

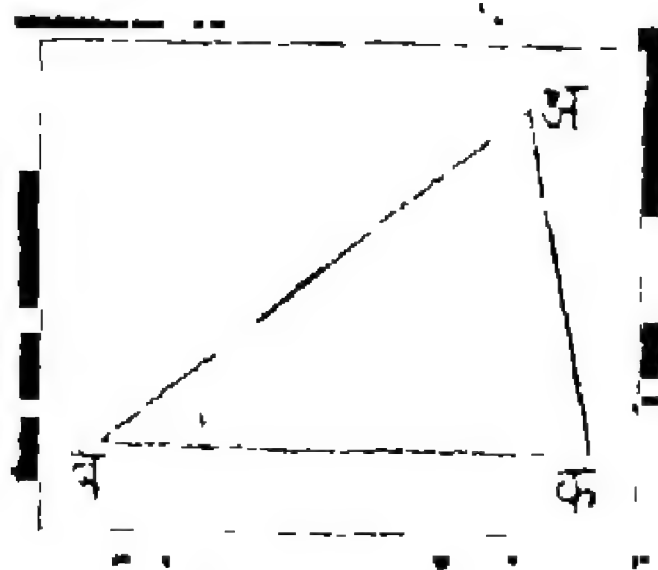
૬. પાસેની આકૃતિમાં આપેલા અવક ત્રિકોણનો અ ખુણો દુભાગો અને અકની બરાબર અલ ભાગ કાપી કાઢો; અને એ આકૃતિની મદદથી ૧૬મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.



૭. ત્રિકોણની એક બાજુ બીજીથી મોટી હોય તો ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, ત્રિકોણની મોટી બાજુ અને પાયાની સામેના ખુણો દુભાગનારી લીટી એ બેની વચ્ચે હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ (નાના ખુણાની સામેની બાજુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણમાં $\angle ક > \angle વ$.

સાધ્ય—અવ $>$ અક.

સિદ્ધતા—

જો અવ, અકથી મોટી ન હોય, તો તે અકની અગળર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

અગળર હોય તો $\angle વ = \angle ક$. (પ્ર. ૧૨)

નાની હોય તો $\angle ક < \angle વ$. (પ્ર. ૧૬)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરુદ્ધ છે;

\therefore અવ $>$ અક.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત ખોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું તેને ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતાનીયેની રચનાકરીને આપી શકાય છે:—

અવને છેદનારી કક્ષ લીટી એવી દોરો, કે $\angle વકક્ષ = \frac{1}{2}(\angle ક - \angle વ)$ થાય.

પછી અક્ષ=અક છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ સર્વ બાજુઓથી મોટો હોય છે.

૨. * પહોળાખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણના પાયાની સામેના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પર અઢ લંબ દોર્યો હોય, તો બતાવી આપો કે અવ $>$ વક, અને અક $>$ વક છે; અને આ પરથી (અવ+અક) $>$ વક છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ઢમાં મળે છે, અને અવ $>$ અક; વક $>$ ઢક એ સિદ્ધ કરો.

૫. અવક ત્રિકોણનાં બ અને ક શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબો ક્ષ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક હોય, તો ક્ષ > ક્ષક એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ ઈ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક, તો ઈવ < ઈક એ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક સરખી બાજુઓ છે; અને તેમને એક લીટી ક્ષ અને ચં બિંદુઓમાં છેદે છે. અવક પાયાને ક તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે અવ > અક.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી મોટી હોય છે.

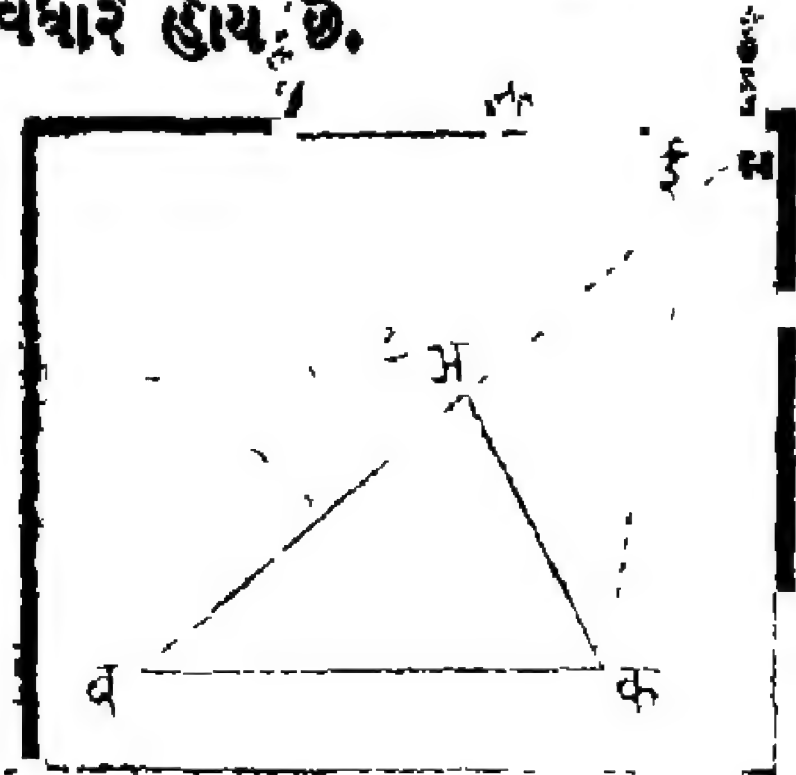
૯. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંનો દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર ફક્ત બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (વઅ+અક) > વક;
 (૨) (કવ+વઅ) > કઅ; અને
 (૩) (અક+કવ) > અવ.

રચના—વઅને ક સુધી વધારો. અકમાંથી અક જેવડો અઈ કકડો કાપી કાઢો. કઈ સાંધો.

સિદ્ધતા—

∴ અઈક ત્રિકોણમાં અઈ=અક, (રચના)

∴ ∠અકઈ=∠અઈક (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠વકઈ > ∠અકઈ,

∴ ∠વકઈ > ∠અઈક.

હવે ઈવક ત્રિકોણમાં ∴ ∠વકઈ > વઈક,

∴ વઈ > ∠વક. (પ્ર. ૧૭)

એટલે (વઅ+અઈ) > વક.

પણ અઈ = અક, (રચના)

∴ (વઅ+અક) > વક.

એજ રીતે (કવ+વઅ) > કઅ, અને (અક+કવ) > અવ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાહબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(અવ+અક) > વક.

(પ્ર. ૧૮)

દરેક બાજુમાંથી અક બાહ કરો.

∴ અવ > (વક-અક).

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અ ખુણા દુભાગીને ૧૮મું પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથી બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કશોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. અથક ત્રિકોણમાં ૬ બિંદુ એવું લીધું છે, કે અઢ=અથ છે; અઢ ખુણાને દુભાગનારી લીટી ચક્રને રૂમાં મળે છે; તે અઢ=૬૬ છે એમ બતાવી આપો, અને તે ઉપરથી અક > અઢ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. અથક ત્રિકોણની અક બાજુમાં ગમે ત્યાં એક ૬ બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે અઢ+અક > અઢ+અક.

૯. અથક ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક ૬ બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે અઢ+અક > અઢ+અક.

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ બાજુ વ્યાસથી નાની હોય છે.

૧૧. અક પાયા પર અથક ત્રિકોણ અને અપચક ચતુષ્કોણ છે; પ, અ બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તે ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેનો ખુણો કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેલનબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈ પણ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રણ મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. અથક ચતુષ્કોણની અંદર ૪ એક બિંદુ છે; તે બતાવી આપો કે (મઠ+મઠ+મઠ+મઠ) > (અક+અઢ).

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે, પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ બતાવી આપો.

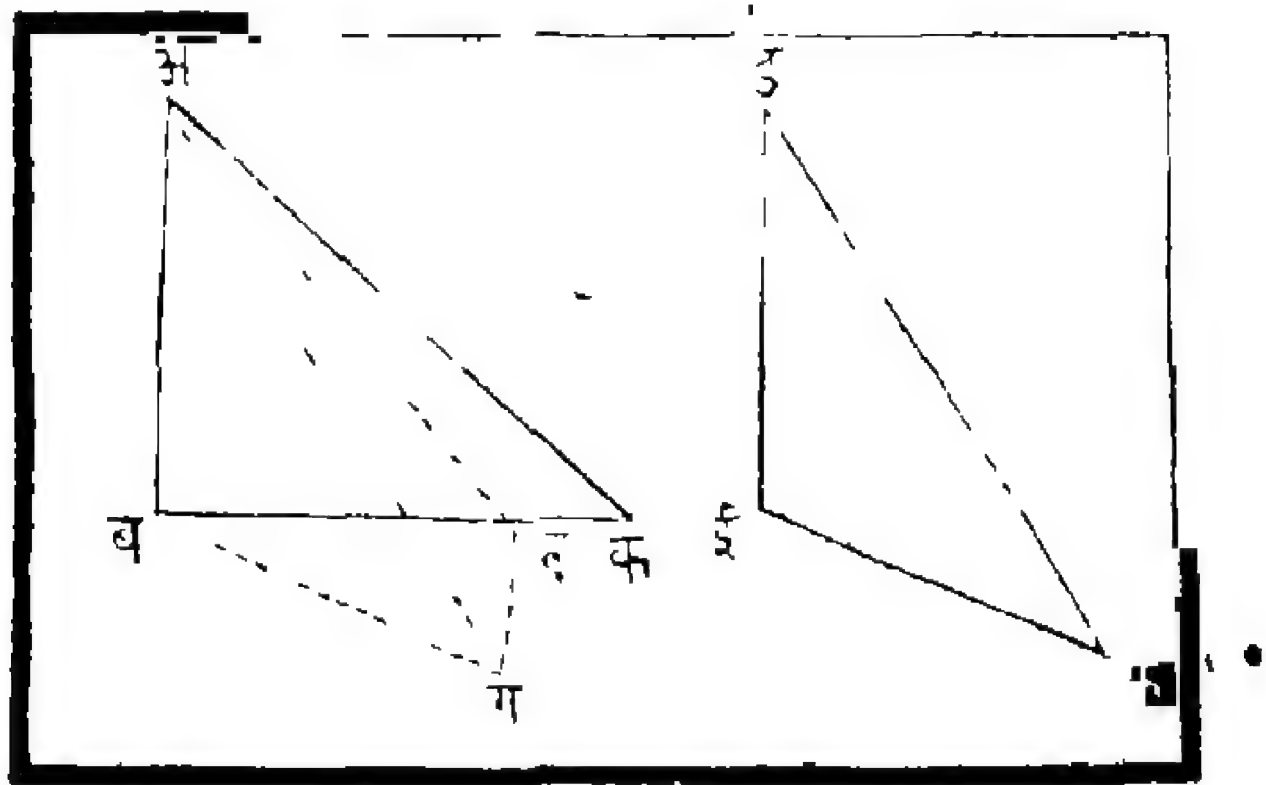
૧૮. ચતુષ્કોણના કોણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. અથવા ત્રિકોણમાં અકતું મધ્યબિંદુ હ છે. જો અક $<$ અક, તો \angle અ પહેલો ખુલ્લો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહેલાની પરિમિતિ બીજાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો જે ત્રિકોણમાંનો ખુણો મોટો હોય, તે ત્રિકોણનો પાયા નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો હોય છે.



પક્ષ—અથવા અને અક એ બે ત્રિકોણમાં અક=અક,
અક=અક, અને \angle અ $>$ \angle અ.
સાધ્ય—પક $>$ અક.

નિદાન—

∴ હઈ=અવ,

∴ હઈ, અવ પર બરાબર આવી રહેશે.

હઈફ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકો, કે હ અને ઈ બિંદુઓ અ અને વ પર પડે; અને અવની જે બાજુએ ફ શિરોબિંદુ છે તેજ બાજુએ ફ શિરોબિંદુ પડે. ધારો કે ફ, ગ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle અવક $>$ \angle અવગ, (પક્ષ)

∴ અગ (હફ), અવ અને અવની વચ્ચે પડે છે.

\angle અવકમાંથી \angle અવગ (\angle હફ) બાદ જતાં બાકી રહેલા \angle અવગને દુભાગો, અને દુભાગનારી લીટીને હ બિંદુમાં ચક્રને મળવા દો. હગ સાંધો.

∴ અગહ અને અવહ ત્રિકોણોમાં—

અગ=અવ.

(પક્ષ)

અહ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.

અને \angle ગઅહ= \angle કઅહ;

(રચના)

∴ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૦)

∴ હગ=હક.

આ દરેકમાં ચહ ઉમેરો.

∴ ચહ+હગ=ચહ+હક (એટલે ચક્રની બરાબર.)

હવે ચહગ ત્રિકોણમાં—

∴ ચહ+હગ $>$ ચગ,

(પ્ર. ૧૮)

અને ચહ+હગ=ચક;

∴ ચક $>$ ચગ.

પણ ચગ એટલે ઈફજ;

∴ ચક $>$ ઈફ.

૧૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

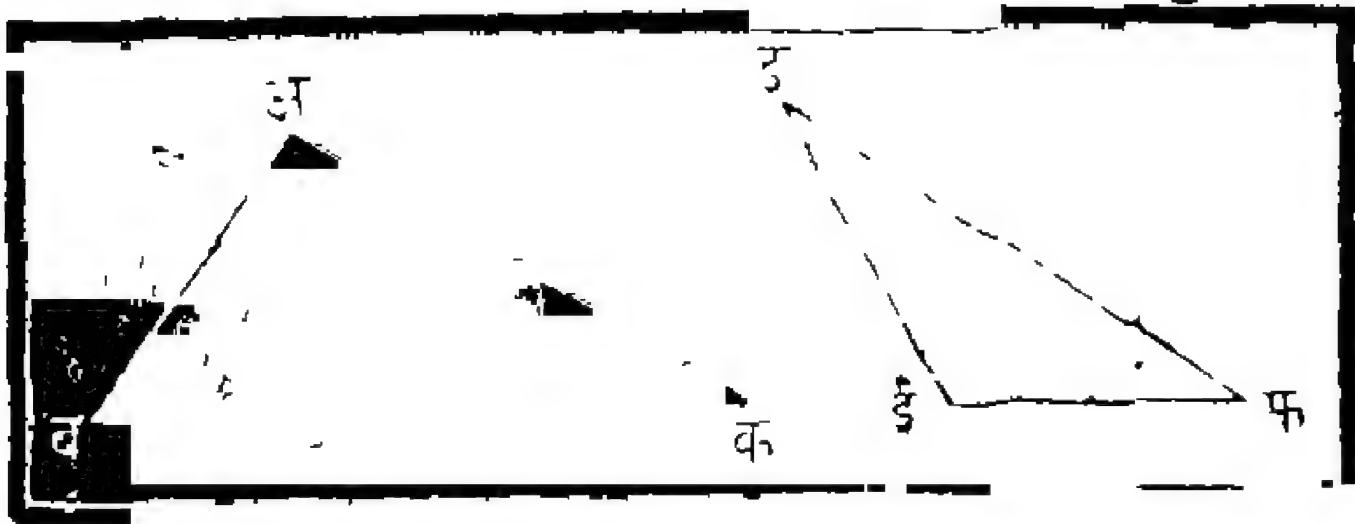
૧. અવકહ એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં અહ=ચક, અને \angle અહક $>$ \angle ચકહ; તો બતાવી આપો કે અક $>$ અહ.

૨. અવક ત્રિકોણની અઘ અને અક બાજુઓને અનુક્રમે ઢ અને ઈ સુધી વધારીને ઘઢ=ઈઈ કરેલી છે. હવે જો અઘ>અક હોય, તો બતાવો કે ઘઢ>ઈઈ.

૩. અવક ત્રિકોણની ઘઘ અને કઘ બાજુઓને વધારીને ઘઢ અને ઈઈ સરખી કરી છે. હવે જો અઘ>અક હોય, તો બતાવી આપો કે ઘઈ>કઢ.

પ્રમેય ૨૦.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાચો મોટા હોય તેનો તે પાયાની સામેના ખુણા, જેનો પાચો નાનો છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—અવક અને ઈઈફ ત્રિકોણોમાં અઘ=ઈઈ, અઘ=કઘ, અને ઘક>ઈફ.

સાધ્ય— $\angle A > \angle D$.

સિદ્ધાન્ત—

જો $\angle A > \angle D$ ન હોય, તો $\angle A = \angle D$ હોવો જોઈએ, અથવા $\angle A < \angle D$ હોવો જોઈએ.

હવે $\angle A = \angle D$ હોય, તો

ઘક = ઈફ;

(પ્ર. ૧૦)

અને $\angle A < \angle D$ હોય, તો

ઘક < ઈફ.

(પ્ર. ૧૬)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,
એટલે \angle અ; \angle ઢની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો
પણ નથી.

$\therefore \angle$ અ $>$ \angle ઢ.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં અવ $>$ અક; વક, ઢમાં દુભાગેલી છે;
તો અઢક સાંકડો ખુણો છે એમ બતાવી આપો.

૨. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ઢ મધ્યગિંદુ છે. અઢમાં
ગમે ત્યાં ઈ ગિંદુ લીધેલું છે; તો એમ બતાવો કે જો અવ $>$ અક
હોય, તો ઈવ $>$ ઈક છે.

૩. અવક ત્રિકોણની વઅ, કઅ બાજુઓમાંથી વઢ, કઈ સરખા
કકડા કાપી કાઢ્યા છે. હવે જો વઈ $>$ કઢ હોય, તો અવ $>$ અક
છે એમ બતાવી આપો.

૪. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં અઢ = વક. હવે એમ બતાવી આપો કે જો

(૧) અક $>$ વઢ હોય, તો \angle અઢક $>$ \angle વકઢ;

(૨) અવ $<$ કઢ હોય, તો \angle અકવ $<$ \angle ઢઅક;

(૩) \angle અઢક $>$ \angle વકઢ હોય, તો \angle અવક $>$ \angle વઅઢ.

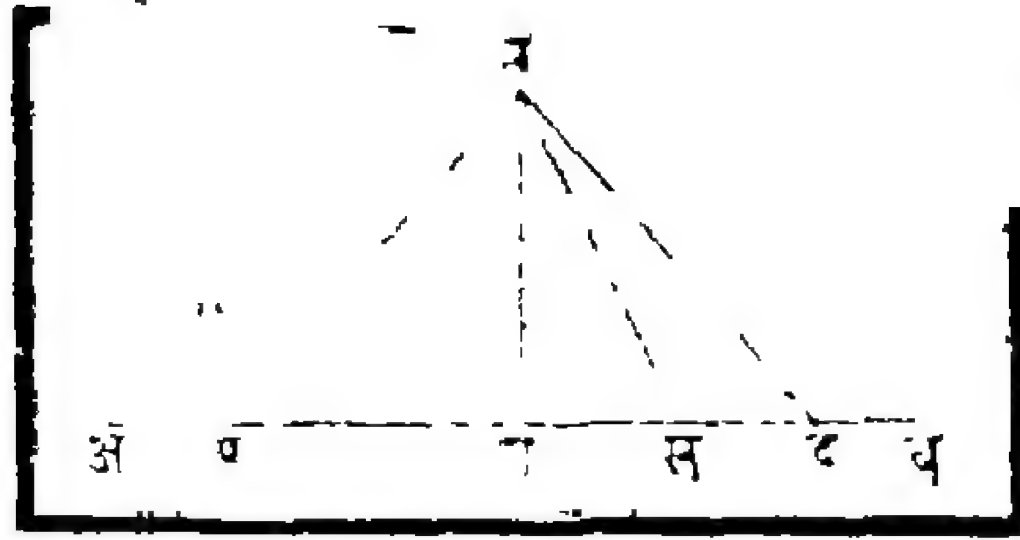
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના ગિંદુમાંથી તે લીટી પર જે
લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી
હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટા ખુણા કરનારી લીટી, નાનો
ખુણા કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર મ આપેલું બિંદુ છે.

(૧) મન, અવ પર લંબ છે; અને મવ, અવને વમાં મળનારી લીટી છે. (૨) $\angle મનવ = \angle નમવ$. (૩) $\angle નમવ > નમસ$.

સાધ્ય—(૧) મન સૌથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

\therefore મવન ત્રિકોણની વન બાજુ થ સુધી વધારી છે,

$\therefore \angle મનવ > \angle મવન$. (પ્ર. ૮, ઉ. સિ. ૩)

અને $\angle મનવ = 1$ કાટખુણો (અને તેટલા માટે) =

$\angle મનવ$,

$\therefore \angle મનવ > \angle મવન$.

$\therefore મવ > મન$.

(પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે મમાંથી અવ સુધી દોરેલી બીજી કોઈ પણ લીટી કરતાં મન નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાશે.

સાધ્ય—(૨) મવ = મદ.

સિદ્ધતા—

\therefore મવન, મદન ત્રિકોણોમાં—

$\angle મનવ = \angle મનદ$,

$\angle નમવ = \angle નમદ$,

મન બાજુ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

$\therefore મવ = મદ$.

(પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) મવ $>$ મસ.

સિદ્ધતા—

∴ મદસ ત્રિકોણની દસ બાજુ વ સુધી વધારી છે,
∴ \angle મસપ $>$ \angle મદપ. (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

અને ∴ મપ = મદ,

∴ \angle મદપ = \angle મપદ (= \angle મપસ.) (પ્ર. ૧૨)

∴ \angle મસપ $>$ \angle મપસ.

∴ મપ $>$ મસ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી સૌથી નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

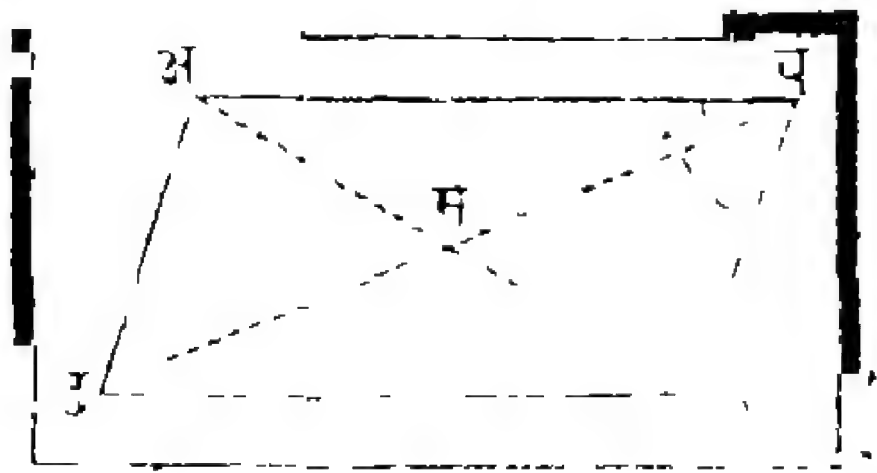
૧. * એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એક બાજુની સામેના ખુણો-એટલા અંવયવા બિંદુ ત્રિકોણના એમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણોની સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપેલા સરખા ખુણા પહોળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

- (૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;
- (૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;
- (૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને
- (૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



પક્ષ—અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. અક,વઢ તેના કર્ણ છે.

સાધ્ય—(૧) $\angle અ = \angle ક$, અને $\angle ઘ = \angle ઢ$;

(૨) અઢ=ઘક અને અઘ=ઢક;

(૩) અક અને વઢ કર્ણો અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે;

(૪) અક અને વઢ કર્ણો એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

\therefore અઢ ॥ ઘક, અને તેમને વઢ મળે છે,

$\therefore \angle કવઢ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle અઢઘ$ (પ્ર. ૬.)

તેમજ \therefore અઘ ॥ ઢક, અને ઢઘ તેમને મળે છે,

$\therefore \angle અઘઢ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle કઢઘ$. (પ્ર. ૬.)

$\therefore \angle અઘઢ + \angle કવઢ = \angle કઢઘ + \angle અઢઘ$.

$\therefore \angle ઢ = \angle ઘ$.

એજ રીતે $\angle અ = \angle ક$ છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

\therefore અવઢ, કઢઘ ત્રિકોણોમાં—

$\angle અઢઘ = \angle કવઢ$,

$\angle અઘઢ = \angle કઢઘ$,

અને વઢ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

$\therefore \triangle અવઢ \equiv \triangle કઢઘ$ (પ્ર. ૧૧)

\therefore અઢ = ઘક, અને અઘ = ઢક.

(૩)

$\therefore \triangle અવઢ \equiv \triangle કઢઘ$ (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore વઢ કર્ણથી અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરૂખા ભાગ થયા છે. તેમજ $\triangle અઢક \equiv \triangle અઘક$ એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

$\therefore \triangle મઅઢ$ અને $\triangle મકઘ$ માં—

$\angle અઢમ = \angle કઘમ$, (પ્ર. ૬)

$$\angle અમઢ = \angle કમઢ,$$

(પ્ર. ૩)

$$અઢ = ષક;$$

$$\therefore \triangle અમઢ \equiv \triangle ષમક.$$

(પ્ર. ૧૧)

$$\therefore મઞ = મક, \text{ અને } મઢ = મઞ.$$

એટલે ષક અને ષઢ કર્ણો એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (સમાંતર) બધે ઠેકાણે સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો ૧૮ ખુણો હોય, તો બાકીના બંન્ના ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની ઈ પાણુ બે બાજુઓ સરખી હોય તો સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજી સાથે કાટખુણો કરે છે.

૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામા બાજુ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. અઞકઢ ચતુષ્કોણમાં ષક = અઢ છે, પણ તેઓ સમાંતર થી; અને અઞ ॥ ઢક છે; તો $\angle ક = \angle ઢ$ એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપલા પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો ઈ અને ફ અનુક્રમે અઞ અને ઢકનાં મધ્યબિંદુ હોય, તો ઈફ, અઞ પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો દરેક કર્ણ સામાં શિરોબિંદુઓથી રખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાજુઓ સરખી છે; તો તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો સામા ખુણાની રાખર છે અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જે સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણના કણો સરખા હોય છે તે ૮ખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૯. જે સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણના કણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, તેની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જે સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણના કણો સમાન હોઈને એક બીજા પર લંબ હોય તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. અથવા પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાજુએ અથવા અથવા સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણ એવા દોર્યા, કે પહેલાની અથવા બાજુ બીજાના અર્ધ કર્ણ બરાબર છે, અને પહેલાનો અથવા કર્ણ બીજાની બાજુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે:—

(૧) ક, અ, ફ બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
તે (૨) ઢ, ઝ, ઈ બિંદુઓ }

૧૨. અથવા સમાંતરઆણુ ચતુષ્કોણના અથવા કર્ણમાં ઈ બિંદુ લીધું છે, કે ઈચ=ઈઢ છે; તો ઈ, અથવા મધ્યબિંદુ છે એમ સાબી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. અથવા ત્રિકોણની અથવા બાજુમાં ઈ અને ફ બે બિંદુઓ. અથવામાં ધ બિંદુ અને અથવામાં ઢ બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, કે પછી લીટી ઈફની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય?

૧૪. *સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુમાંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડામાંથી બીજી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાજુ ત્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણ બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર છે.

પ્રમેય ૨૩.

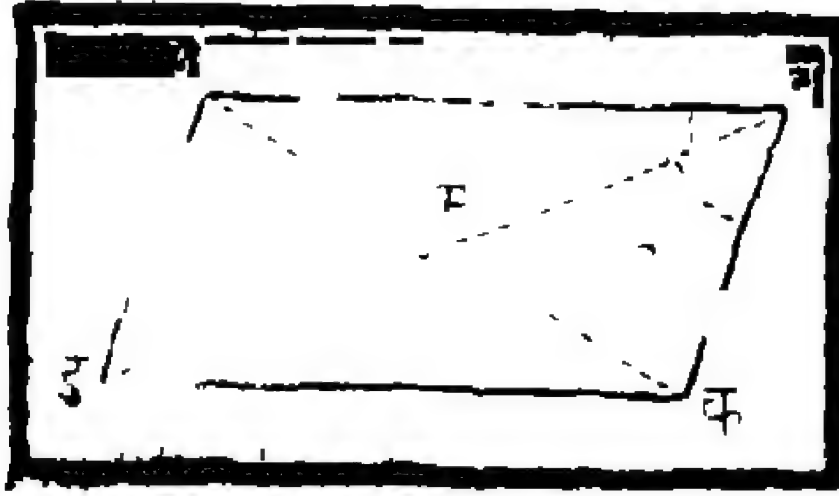
કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં જે—

(૧) સામસામી બાજુઓ પૈકી, એક બેડમાંની બે બેડો સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાજુઓની ફરેક બેડમાંની બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૪) કહોં એક બીજને દુભાગતા હોય, તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—અબકડ ચતુષ્કોણમાં અબ, કડ સરખી અને સમાંતર છે.

સાધ્ય—અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—અ, ક સાંધો.

સિદ્ધતા—

હવે :: અબ ॥ કડ, (પક્ષ)

અને તેમને અક મળે છે,

∴ \angle અબક = વ્યુત્ક્રમ \angle અકડ. (પ્ર. ૬)

હવે :: \triangle અબક, અને \triangle કડઅમાં—

અબ = કડ, (પક્ષ)

અક સાધારણ છે,

\angle અબક = \angle અકડ;

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ \angle અબક = \angle કઅડ.

અને :: આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.

∴ વક ॥ અડ. (પ્ર. ૪)

∴ અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—અવ = કઢ, અને વક = અઢ.

સાધ્ય—અવકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \triangle અવક, \triangle કઢઅમાં—$

અવ = કઢ,

(પક્ષ)

વક = ઢઅ,

”

અક સાધારણુ છે;

 $\therefore \triangle અવક \equiv \triangle કઢઅ.$

(પ્ર. ૧૪)

 $\therefore \angle વઅક = \angle ઢકઅ, અને \angle વકઅ = \angle કઅઢ.$ $\therefore અવ \parallel ઢક, અને વક \parallel અઢ.$

(પ્ર. ૪)

 $\therefore અવકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ છે.$

(૩)

પક્ષ— $\angle અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle ઢ.$

સાધ્ય—અવકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \angle અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle ઢ,$

(પક્ષ)

 $\therefore \angle અ + \angle વ = \angle ક + \angle ઢ;$ એટલે $\angle અ + \angle વ$ એ સરવાળો $\angle અ + \angle વ + \angle ક + \angle ઢ$ તું અર્ધ છે.અને \therefore અવકઢ એક ચતુષ્કોણુ છે, $\therefore \angle અ + \angle વ + \angle ક + \angle ઢ = ૪ કાટખુણા.$

(પ્ર. ૮, ઉ. ૧૬)

 $\therefore \angle અ + \angle વ = ૨ કાટખુણા.$ $\therefore અઢ \parallel વક.$

(પ્ર. ૫)

એજ પ્રમાણે અવ $\parallel ઢક$ છે એમ બતાવી શકાશે. $\therefore અવકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણુ છે.$

(૪)

પક્ષ—અહ, બહ એક ખીજને મમાં દુભાગે છે.

સાધ્ય—અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

$\therefore \triangle અમહ$ અને $\triangle કમવમાં-$

અમ = કમ,

(પક્ષ)

હમ = વમ,

”

$\angle અમહ = \angle કમવ;$

(પ્ર. ૩)

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૦)

\therefore અહ = વક; અને

$\therefore \angle અહમ = \angle વ્યુહમ \angle કવમ,$

\therefore અહ || વક.

(પ્ર. ૪)

\therefore અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. અવકહ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ$, $\angle વ$, $\angle હ$ અનુક્રમે ૬૦° , ૧૨૦° , ૧૨૦° ના છે; તો $\angle ક$ કેવડો? અવકહ કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટી ખીજ બે બાણુઓને સમાંતર હોય છે.

* ૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કણો સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણો એક ખીજ પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણો તેના ખુણાઓને દુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કણો સમાન હોઈને જો તે એક ખીજને

કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જો ચતુષ્કોણના કોણો નાના ચોટા હોઈને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાજુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજાને દુભાગે છે. (૨) સમબાજુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કોણો સરખા હોય છે, તે એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને અવ, કઢ બાજુઓ સ્પષ્ટ અને ચ બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બીજા બે બક્ષકચ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જો ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle બ$ અને $\angle ક = \angle ઢ$ છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓની એક જોડમાંની બાજુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાજુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

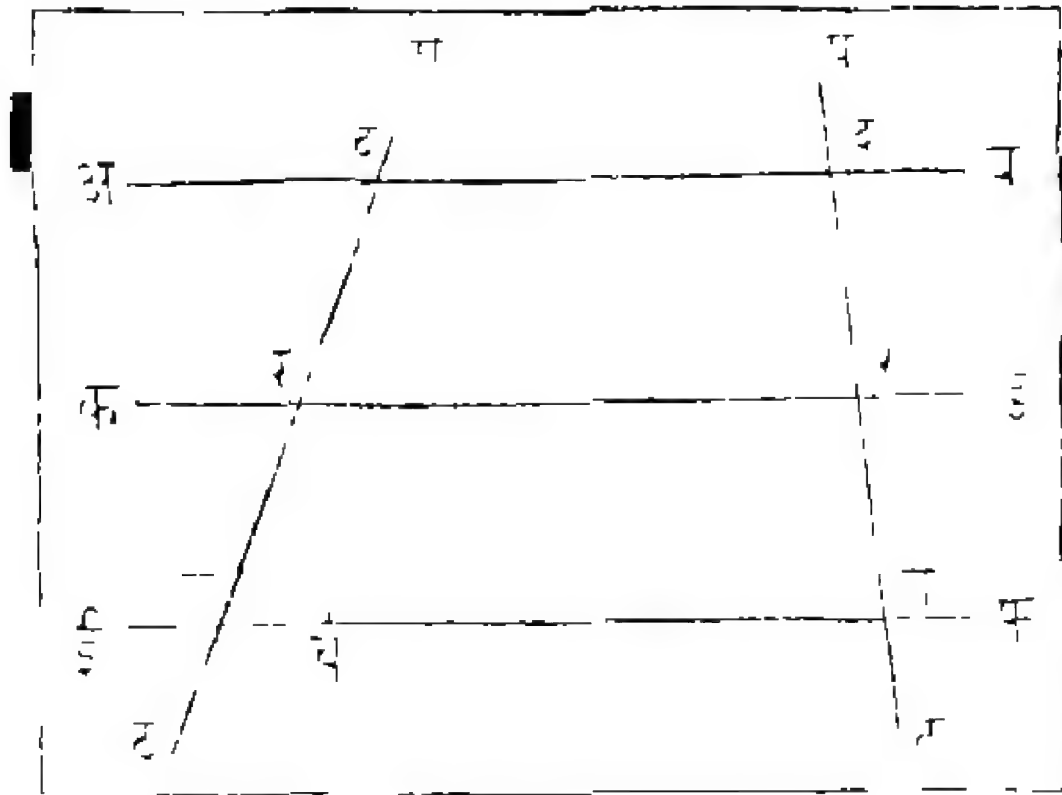
૧૩. અવકઢ એક ચતુષ્કોણ છે; વકઢપ, કઢઅદ, ઢઅવર, અને અવકસ, એ ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો અપ, વદ, કર, ઢસ સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૪. જો ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજાં શિરોબિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક મ બિંદુ છે. મઅઈવ, મવફક, મકગઢ, મઢહઅ, આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોર્યા હોય, તો ઈફગઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે અવકઢથી બમણો છે, એમ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—બ્રહ્મ, કહ, ફફ સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને ; પટ સીધી લીટી અનુક્રમે દ, ર, સમાં છેદે છે; અને દર=રસ. બીજી કોઈ પણ પટ સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને દ, ર, સમાં છેદે છે.

સાધ્ય—દર=રસ.

રચના—પરને સમાંતર દહ, રચ દોરો, અને ધારો કે તે કહ, ફફને હ અને ચમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે ∴ કહ ॥ ફફ,

∴ ∠દરહ = સંગત ∠રસચ.

∴ દહ, રચ બંને ॥ પર

∴ દહ ॥ રચ.

(પક્ષ)

(પ્ર. ૭)

(પ્ર. ૭)

\therefore દરસ તેમને છેદે છે,
 $\therefore \angle રવહ = \text{સંગત } \angle સરચ.$ (પ્ર. ૬)
 $\therefore \triangle રવહ$ અને $\triangle રસચ$ માં-
 $\angle રવહ = \angle રસચ,$
 $\angle રવહ = \angle સરચ,$
 $દર = રસ;$ (પક્ષ)

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

\therefore રવહ = રસચ.

રવહ \parallel રવર, અને રસચ \parallel રસર,

\therefore રવહરવ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ રસચસર પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

\therefore રવહ = રવર અને રસચ = રસર (પ્ર. ૨૨)

પણ રવહ = રસચ,

\therefore રવર \parallel રસર.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાજુના મધ્યબિંદુ-માંથી પાયાને સમાંતર લીટી દારી હોય, તો તે બીજી બાજુને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધાં હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એકરૂપ હોય છે.

૨. અથવા ત્રિકોણની અથ અને અથ બાજુઓમાં અનુક્રમે ૬ અને ૬ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અઠ = ૬ અથ, અને અઈ = ૬ અથ; તો અઈ, અથનો એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભગાય છે.

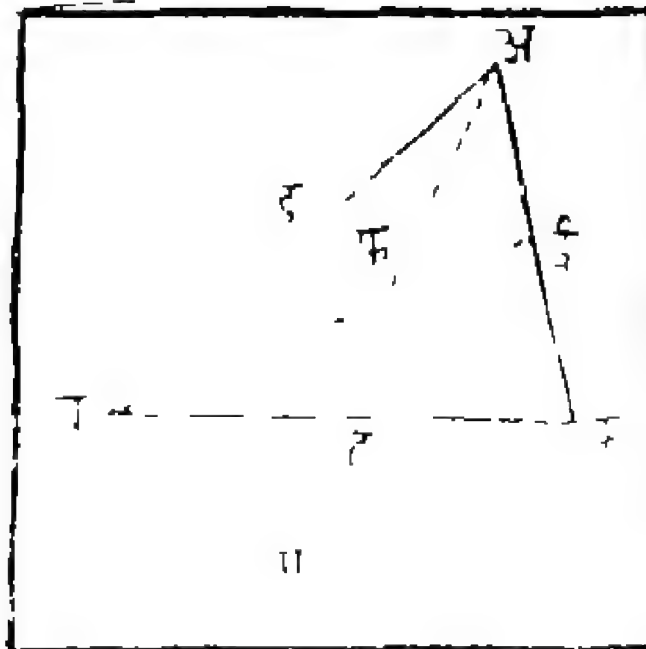
૬. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણુના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો જો કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરોબિંદુ તરફના ભાગ બીજા ભાગથી બમણું હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, અને તેની ચાર અને કહ મધ્યગા એક બીજાને ક બિંદુમાં છેદે છે.

સાંધ્ય—(૧) અહ મધ્યગા ક બિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) અક=૨ કહ; ચક=૨ ફઈ; કક=૨ કહ.

સિદ્ધતા—

(૧) (અ, ક બિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તો ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—અ, ક સાંધો. અક લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો કગ ભાગ અકની બરાબર કરો. ચગ અને કગ સાંધો.

∴ Δ અવગતી અવ અને અગ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે હ અને ક છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ હક, ચગને સમાંતર છે અને ચગના અર્ધ બરાબર છે.

(પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે અકગ ત્રિકોણની અગ અને અક બાજુઓનાં અનુક્રમે ક અને ફ મધ્યબિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ)

∴ ફઈ, ગકને સમાંતર છે અને ગકના અર્ધ બરાબર છે.

(પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

હવે ∴ હક ॥ ચગ,

અને ચઈ ॥ ગક;

∴ ચગકક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને ∴ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાજે છે;

∴ કક; અને કગનું હ મધ્યબિંદુ છે.

હવે ∴ હ, ચકનું મધ્યબિંદુ છે,

∴ અકહ મધ્યગા છે, અને તે કમાં થઈને જાય છે એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∴ ફહ=હગ,

∴ ફગ=૨ ફહ.

પણુ ફગ=અફ,

(રચના)

∴ અફ=૨ ફહ.

એજ પ્રમાણે વફ=૨ ફર્ફ, અને કફ=૨ ફહ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

રપમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાનો સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાંશ કરતાં વધારે હોય છે.

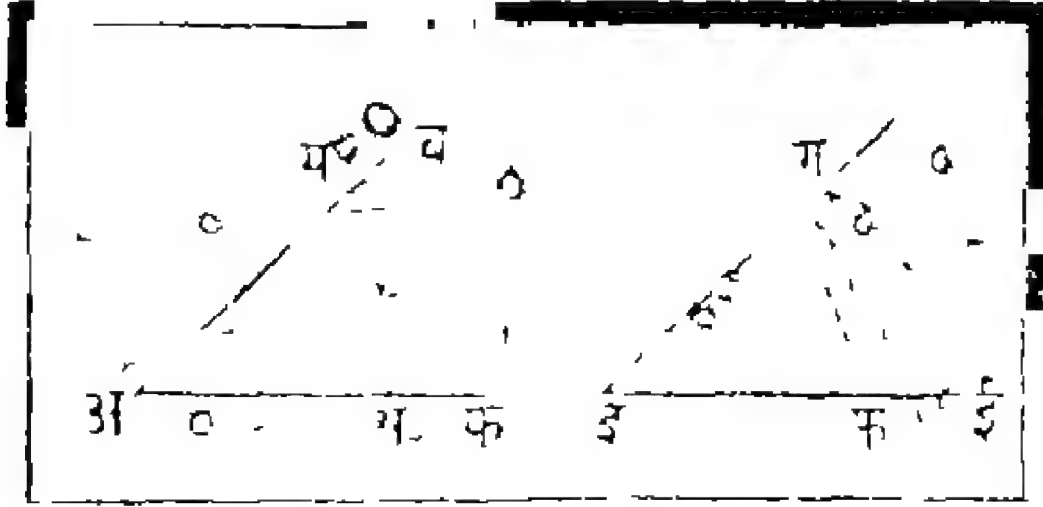
નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

ખંડ ૩.

(કૃત્યો)

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—હફ આપેલી લીટી છે. હ આપેલું બિંદુ છે. વચક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા \angle વચક જેવડો \angle ફકગ કરવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને, અવ અને અકને અનુક્રમે ચ અને કમાં છેદવા દો. હ મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ કૌંસ દોરો. તે હફને અથવા હફના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે, એમ ધારો. ફ મધ્યબિંદુ લઈને ક્ષય (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક કૌંસ દોરો. તેને ફ કૌંસને ગમાં છેદવા દો. હગ સાંધો.

ફકગ માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(ફગ અને ક્ષય સાંધો)

\therefore અક્ષય, હફગ ત્રિકોણોમાં—

અક્ષ = હફ,

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અચ = હગ,

”

ક્ષય = ફગ;

”

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૪)

$\therefore \angle$ ફકગ એટલે \angle ફકગ = \angle ક્ષઅચ.

૧લા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

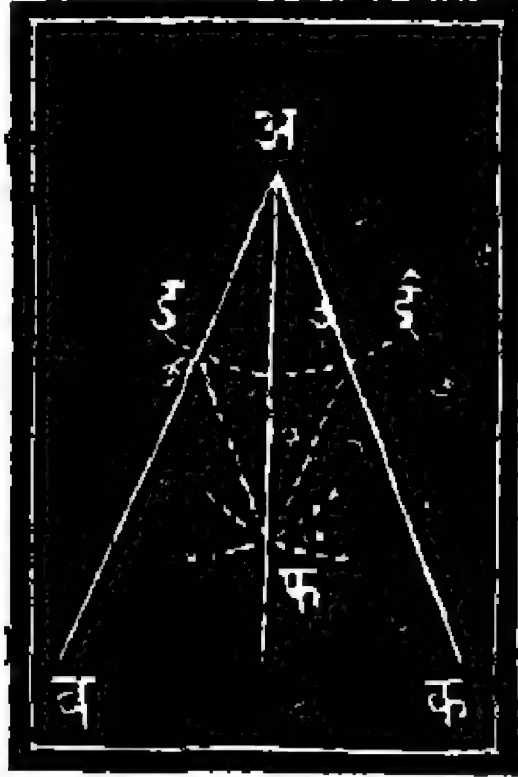
૧. આપેલા ત્રિકોણ જેવડો ત્રિકોણ દોરો.

૧૭૬

૨. આપેલા ચતુષ્કોણ, પંચકોણ...જેવડી આકૃતિ દોરો.
૩. આપેલા કટખુણ ત્રિકોણના બે સંમલિતખાણુ ત્રિકોણ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—વઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—વઅક ખુણો દુભાગવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, અથ અને અકને અનુક્રમે ઢ અને ફમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. ઢ અને ફ મધ્યબિંદુઓ લઈને ઢફ જેટલી ત્રિજ્યાએ ફમાં એક બીજાને છેદનારા બે કૌંસ દોરો. અફ સાધો.

અફ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(ઢફ, ફફ સાધો.)

∴ અફઈ અને અફઢ ત્રિકોણોમાં

અઈ = અઢ,

ફઈ = ફઢ,

અફ બંનેમાં સાધારણ;

∴ $\triangle અફઈ \equiv \triangle અફઢ$.

∴ $\angle ઢઅફ = \angle ફઅફ$.

રજા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ખુણાના ૪, ૮...સરખા ભાગ કરો.

(એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)
(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

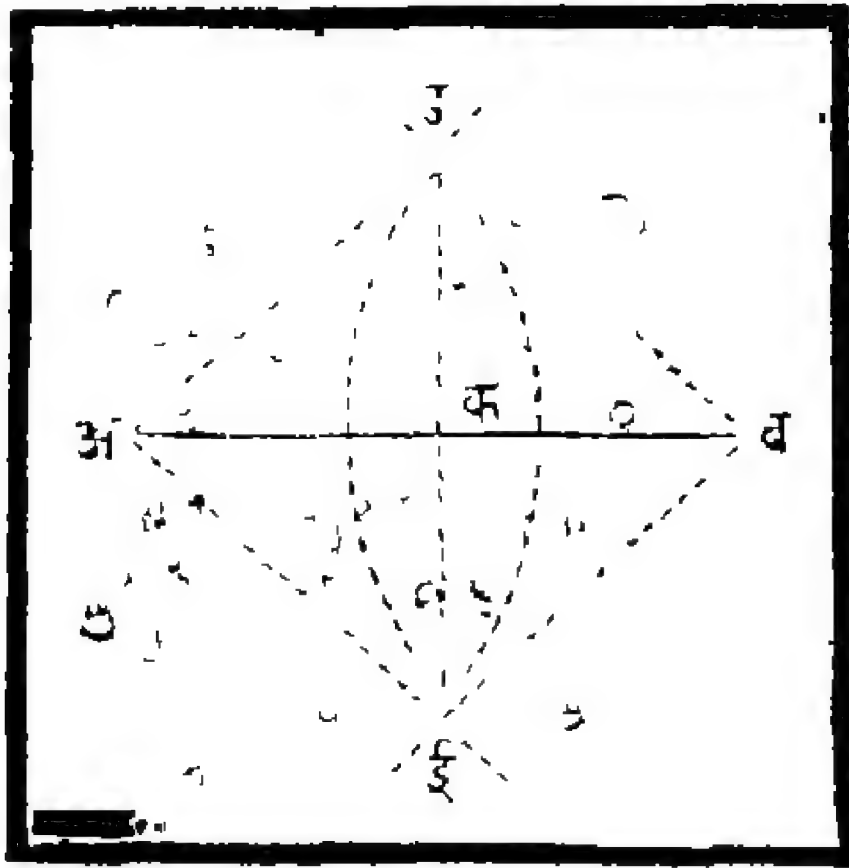
(પ્ર. ૧૪)

૨. આપેલા પુણાના બે ભાગે એવા કરો, કે એક બીજાથી ત્રણગણો થાય.

૩. અવક પુણાના વઘ, વક ભુજોમાં હ અને ર્ બિંદુઓ એવાં હો, કે \angle વઘર્ = ૩ \angle વર્હ હ થાય.

કુટુંબ ૩.

આપેલી લીટીને દુભાંગવી.



પક્ષ—અથ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—અચના બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના—અ, ષ મધ્યગિંદુઓ લઈને ૩ અક્ષથી મોટી ત્રિજ્યાએ
હ અને ઈમાં એક બીજાને છેદનારા બે કૌંસો દોરો. હ, ઈ સાંધો
અને સાંધનારી લીટીને અક્ષને ક્રમાં છેદ્યા દો.

अब, क भिदुमां दुलगाशे.

सिद्धता—

(अहं, वह, अहं, अहं सांधी.)

∴ अद्वैत, नद्वैत त्रिकोणोभां—

अह = बह.

$$a^2 = b^2,$$

સર્વ જંનેમાં સાધારણ;

$\therefore \Delta \text{असंग} \equiv \Delta \text{बसङ्ग}$.

$\therefore \angle \text{अडक} = \angle \text{बडक}.$

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

"

(4. 98

હવે \triangle અઢક, \triangle વઢકમાં—

અઢ=વઢ,

ઢક બંનેમાં સાધારણ,

\angle અઢક = \angle વઢક;

$\therefore \triangle$ અઢક $\equiv \triangle$ વઢક.

(પ્ર. ૧૦)

\therefore અક = કવ.

કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ઉપરના કૃત્યની આકૃતિમાં અક, ઢઈને કાટખુણે દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

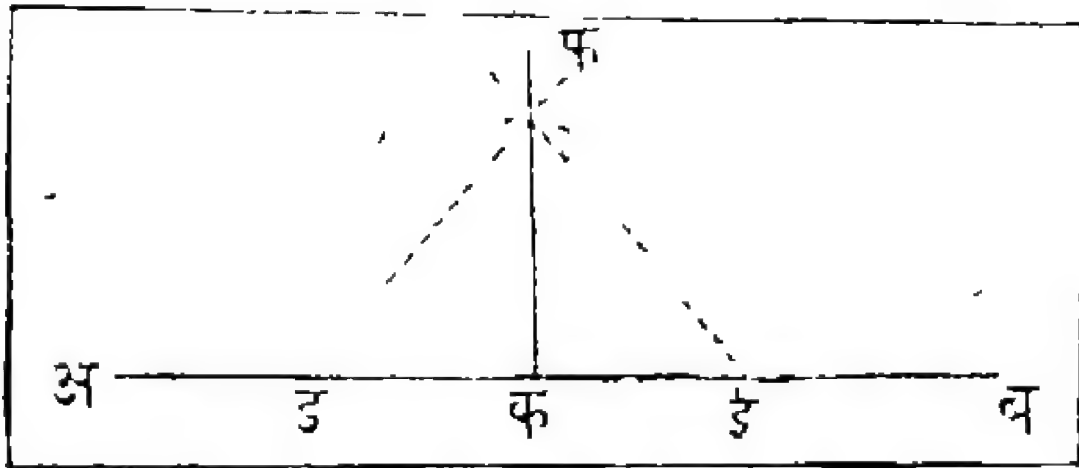
૨. આપેલી સીધી લીટીના ૪, ૮.....સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજાથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજાથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દારો.



પક્ષ—અથ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અથ પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં કથી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ ઢ અને ઈ બિંદુ લો. ઢ, ઈ મધ્યબિંદુઓ ધારીને કઢથી

ગમે તોટલી મોટી ત્રિજ્યાએ ફમાં છેદનારા કૌસો દોરો. કફ સાંધો.
કફ, અથ પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(કઢ, ફઈ સાંધો.)

∴ \triangle કફઢ અને \triangle ફકઈમાં—

કઢ = ફઈ.

(રચના)

ફઢ = ફઈ,

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

કફ બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle કફઢ \equiv \triangle ફકઈ,

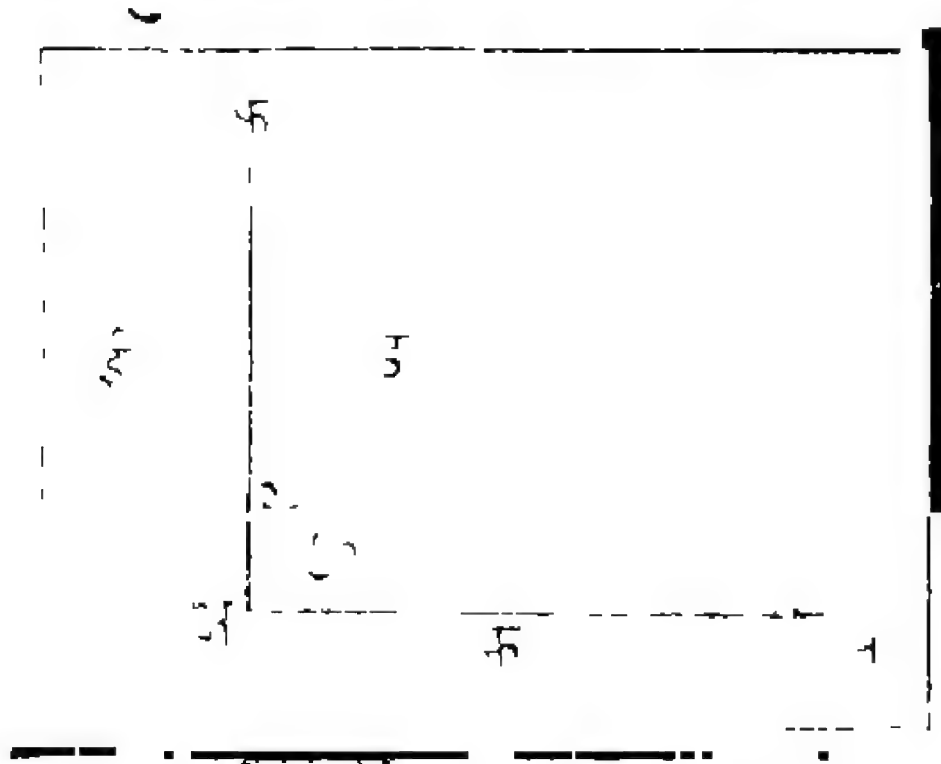
(પ્ર. ૧૪)

∴ \angle કફઢ = \angle ફકઈ.

∴ કફ, અથ પર લંબ છે.

બીજી રીત.

જે બિંદુમાંથી લંબ દારવો છે તે બિંદુ અ છે એમ ધારો.



રચના—અને મધ્યબિંદુ ધારી ગમે તે ત્રિજ્યાએ કઢઈ કૌસ દોરો, અને તેને અથને ફમાં છેદવા દો. તેજ ત્રિજ્યાએ તે કૌસના કઢ, ઢઈ ભાગ કાપી કાઢો. ઢ અને ઈ મધ્યબિંદુઓ લઈને પહેલાંના જોટલીજ ત્રિજ્યાએ એક બીજાને ફમાં છેદનારા બે કૌસ દોરો. અક સાંધો.

સિદ્ધતા—

(અઢ, અઈ, ફઢ, ફઈ સાંધો.)

∴ અઢ = ઢઈ = ઈઅ.

∴ અહીં સમઝાણુ ત્રિકોણ છે.

∴ \angle હઝઈ = 60° . (પ્ર. ૧૨, ઉ. સિં. ૨)

તેમજ ∴ અફ, \angle હઝઈને દુભાગે છે, (કૃ. ૩)

∴ \angle હઝફ = 30° .

પણ \triangle અકહ સમઝાણુ છે,

∴ \angle કઝહ = 60° .

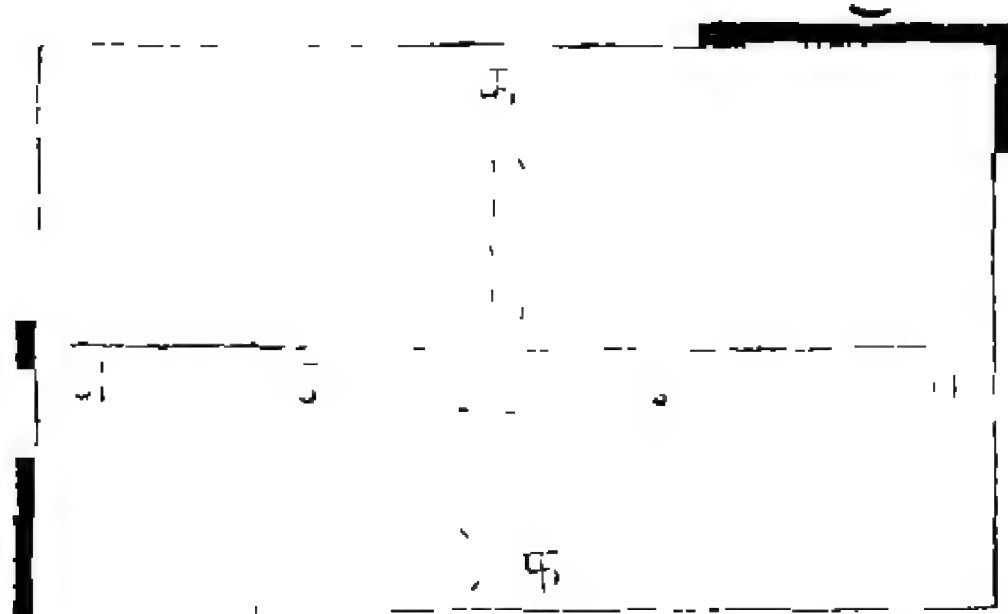
∴ \angle ઘઝફ = 60° .

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.
૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.
૩. ૨૨ $\frac{1}{2}$ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.
૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી બરાબર થાય, એવો ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પક્ષ—અહીં આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અહીં પર લંબ દોરવો.

રચના—ક મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને અહીંને હ અને હમાં છેદનારો કૌંસ દોરો. હ, હ મધ્યબિંદુઓ લઈને હહ

જેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજાને કામાં છેદે એવા એ જોડે દોરો.
કા સાંધો. ધારો કે કા, અબને ગમાં છેદે છે.
કગ, અબ પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(કહ, કઈ, ફહ, ફઈ સાંધો.)

∴ \triangle કહફ અને \triangle કઈફમાં—

કહ = કઈ,

ફહ = ફઈ,

ફક બંનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle કહફ = \triangle કઈફ.

(પ્ર. ૧૪)

∴ \angle હકફ = \angle ઈકફ.

હવે \triangle હકગ અને \triangle ઈકગમાં—

∴ કહ = કઈ,

કગ બંનેમાં સાધારણ.

\angle હકગ = \angle ઈકગ;

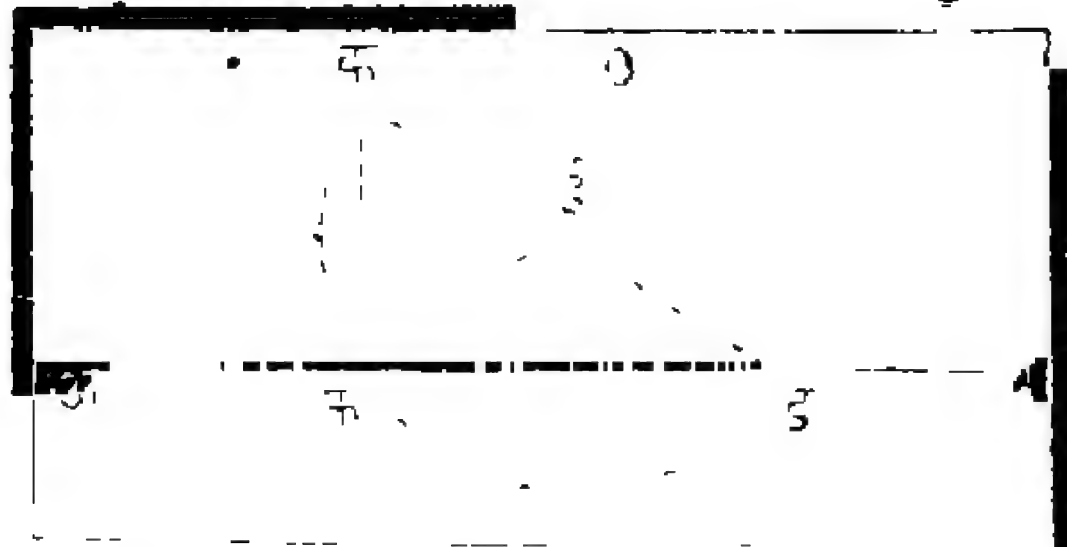
∴ \triangle હકગ = \triangle ઈકગ;

(પ્ર. ૧૦)

∴ \angle કગહ = \angle કગઈ.

∴ કગ, અબ પર લંબ છે

બીજી રીત.



રચના—અબમાં (કની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે
તે હ બિંદુ લો. ક, હ સાંધો.

કહને ફમાં દુભાગો.

ફ મધ્યબિંદુ અને ફહ ત્રિજ્યા લઈને અબને કમાં છેદનારો
જોડે દોરો. કા સાંધો.

કફ, અથવા પર લંબ થશે.

સિદ્ધાન્ત—

(ઈ, ફ સાંધો.)

$$\therefore \triangle \text{કઈફમાં કઈ} = \text{ફઈ},$$

$$\therefore \angle \text{કફઈ} = \angle \text{ફકઈ.} \quad (\text{પ્ર. ૧૨})$$

તેજ પ્રમાણે $\therefore \triangle \text{ઈફડમાં ઈફ} = \text{ઈડ},$

$$\therefore \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{ફડઈ;}$$

$$\therefore \angle \text{કફઈ} + \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ.} \quad (\text{પ્ર. ૧૨})$$

$$\text{પણ } \angle \text{કફઈ} + \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{કફડ},$$

$$\therefore \angle \text{કફડ} = \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ.}$$

$$\therefore \angle \text{કફડ} = \frac{1}{2} (\angle \text{કફડ} + \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ}).$$

$$\text{પણ } \therefore \angle \text{કફડ} + \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ} = 2 \text{ કાટખુણા,}$$

(પ્ર. ૮)

$$\therefore \angle \text{કફડ} = 1 \text{ કાટખુણો.}$$

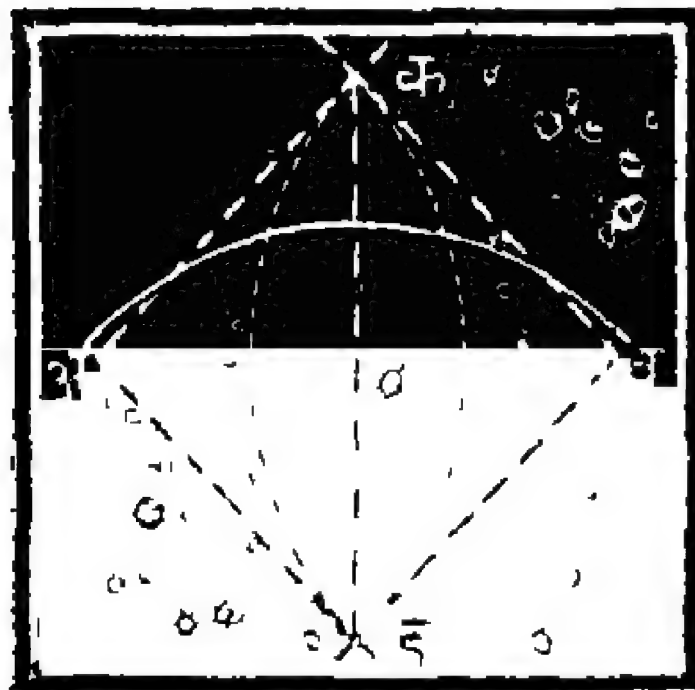
\therefore કફ, અથવા પર લંબ છે.

પ્રમા કર્તવ્ય પર પ્રશ્ન.

અથવા, ગમે તેવો ત્રિકોણ દોરો. દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો. આ લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે એ જોઈ લો.

કૃત્ય ૬.

આપેલો કૌંસ દુભાગવો.



પક્ષ—અથવા આપેલો કૌંસ છે.

સાધ્ય—અથવા દુભાગવા.

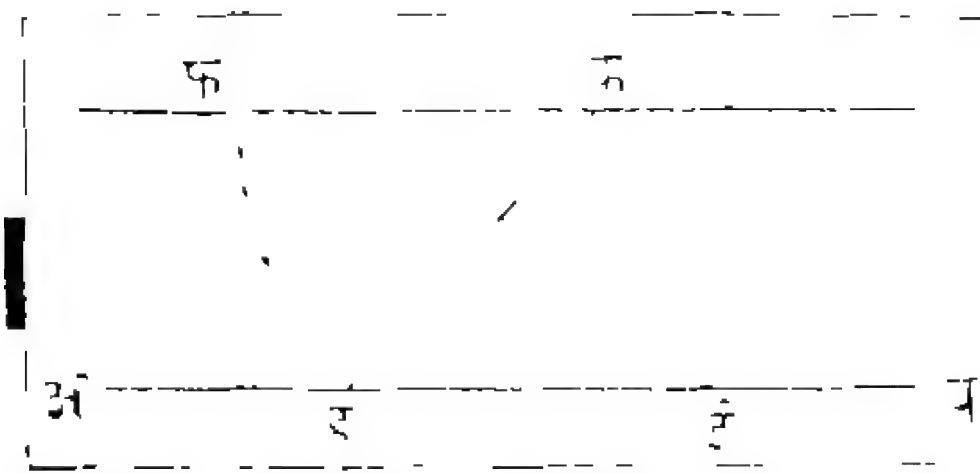
રચના—અ મધ્યબિંદુ અને અવના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને જ મધ્યબિંદુ લઈને પહેલા કૌંસને ક અને હમાં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. કહ સાંધો.

કહ, અવ કૌંસને ફમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિનાં બીજા ભાગ-માંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.

કૃત્ય ૭.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અવને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—અવમાં એક ગમે તે હ બિંદુ લો. હક સાંધો. કહવથી વિરૂદ્ધ બાજુએ હક સાથે કહવ જેવડો ખુણો કરનારી કફ લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

∴ કફ અને અવ લીટીઓને કહ લીટી મળે છે,

અને \angle કફહ = \angle કહવ;

(રચના)

∴ કફ ॥ અવ.

(પ્ર. ૪)

ઉપલી રચનામાં \angle અહક જેવડો \angle હકગ, હકની તેજ બાજુએ (એટલે હકની જે બાજુએ \angle અહક છે તેજ બાજુએ, એટલે જમણી બાજુએ) કર્ષો હોય તો ચાલે કે ? કેમ નહિ ? તેજ બાજુ પર ખુણો કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણો કેવડો

કરવો ? તેજ બાજુ પર \angle વઢક જેવડો ખુણો કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો જ અંદુ ક્યાં લેવું ?

૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધાં હોય, એવો એક લંબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો 60° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો.

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અનુક્રમે ૫, ૨, ૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

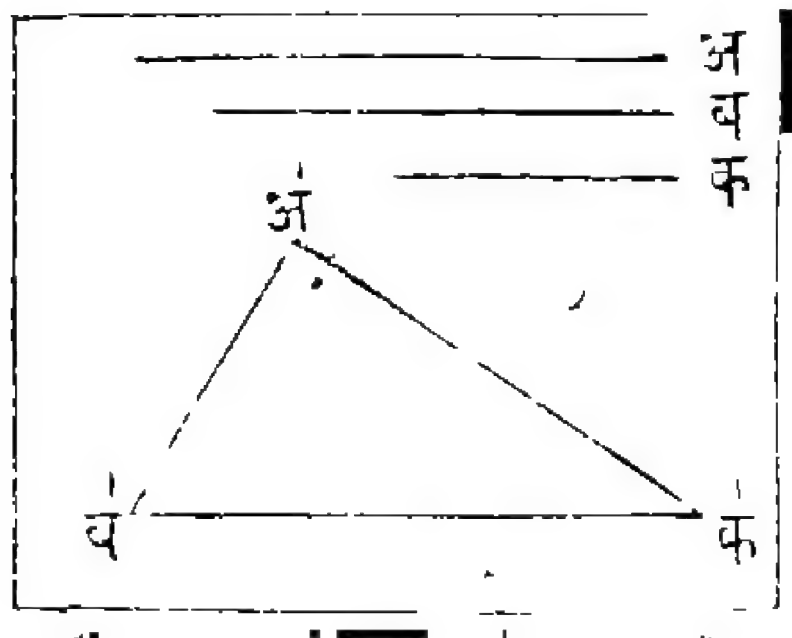
૬. જેની એક બાજુ $2.5''$ અને કર્ણ $4''$ હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

૭. આપેલી લીટીયા આપેલ અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આપ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી એવી છે, કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણની બાજુઓ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—અ, ઘ, ક, એવી ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પૈકી કોઈ પણ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—અ, ઘ, ક, જેટલી જેની બાબતો હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવો.

રચના—અ જેટલી ઘંક લીટી દોરો. ઘ અને ક મધ્યબિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે ક અને ઘ જેટલી ત્રિજ્યાએ બે કૌંસો દોરો. તેમને એક બીજાને અંમાં છેદવા દો. અઘ, ઘંક સાધો.

ઘંક મારેશે ત્રિકોણ છે.

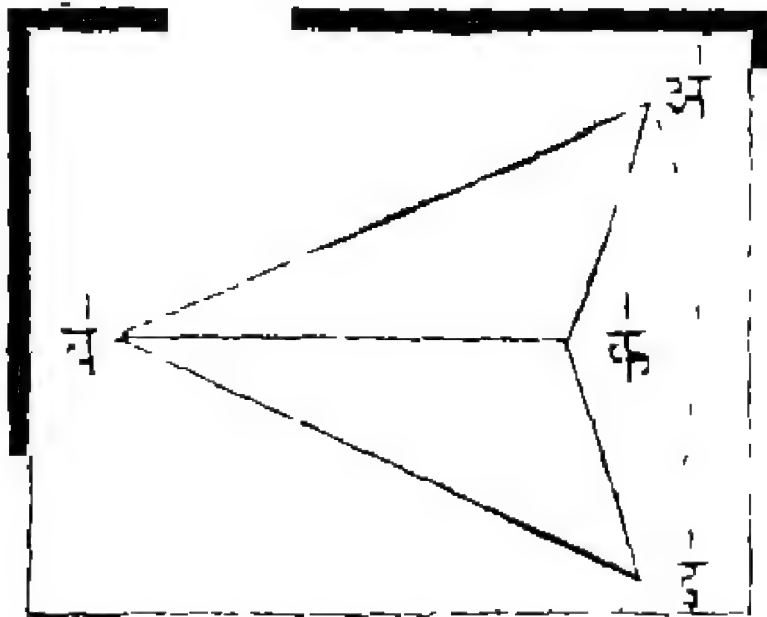
સિદ્ધતા—ઘંક = અ,

કંઘ = ઘ,

ઘંક = ક;

∴ અઘંક ત્રિકોણની બાબતો આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની બાબતો આપેલી લીટીઓની બરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું ?



• ધારો કે અ, ઘ, ક, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પૈકી અ પાવો છે.

અ જેટલી ઘંક લીટી દોરો. ધારો કે કંઘથી ઘ જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે ? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (કંથી ઘ અંતરે હોય

એવાં સર્વ બિંદુઓનો માર્ગ આપણે શી રીતે દોરી શકીએ ? “ક’ મધ્યબિંદુ અને જ નેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.” આ વર્તુળની સર્વ ત્રિજ્યાઓ જ નેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય ક’માંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ જથી ઓછી કે વધારે થશે. હવે, જ’માંથી ક’ નેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે ? “જ’ મધ્યબિંદુ અને ક’ ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ.” આ વર્તુળો એક બીજાને ક્યાં છેદે છે ? “અ’ અને હ’ બિંદુઓમાં” આ બિંદુઓમાંથી જ’ અને ક’ સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ? “આ બિંદુઓ સિવાય તમે બીજું એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશો, કે જેમાંથી જ’, ક’ સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે ક’ અને જ’ લંબાઈની થાય ? “ના.”

અ, જ, ક, નેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ જ્યારે જ’ની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો જ’ક’નું ત્રિકોણ જ’ક’ પાયા પર, હ’ છેડા ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂક્યો હોય, તો હ’ બિંદુ ક્યાં પડશે ? “અ’ પર.” શા માટે ? “તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે.”

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે અ, જ, કની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ જ’ક’ પર મૂક્યો હોય તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ અ’ પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં શા નિયમ નીકળે છે ? “તે એકરૂપ હોય છે.”

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.
૨. જેની સરખી બાજુઓમાંથી એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.
૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.

૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય એવો સમઘ્રિજ્યાળુ ત્રિકોણ દોરો.

૫. આપેલા પાયા પર એક સમઘ્રિજ્યાળુ ત્રિકોણ દોરો.

૬. * કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૭. જેની દરેક બાજુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમઘ્રિજ્યાળુ ચતુષ્કોણ કાઢો.

૮. આપેલા પાયા પર નિયમિત ષટ્કોણ કાઢો.

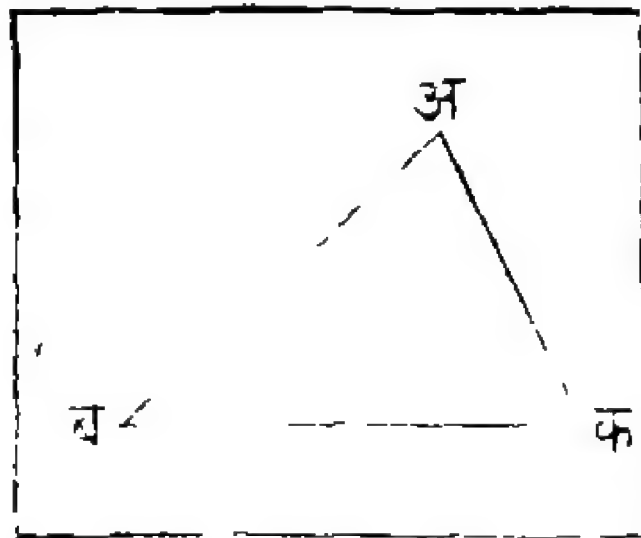
૯. એક ત્રિકોણની (પાયા સિવાયની) બે બાજુઓ અને ઉચ્ચાર્ધ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણનો પાયો, એક બાજુ, અને સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા, એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણનો પાયો, ઉચ્ચાર્ધ, અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે કર્ણો અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

સૂચના—



ત્રિકોણના પુણી અને બાજુઓ દર્શાવતી માટે નીચેનાં સંકેત નક્કી થએલાં છે. અલગ ત્રિકોણમાં—

∠ અ એટલે વચક ખુણો,

▮ વ એટલે અલગ ખુણો,

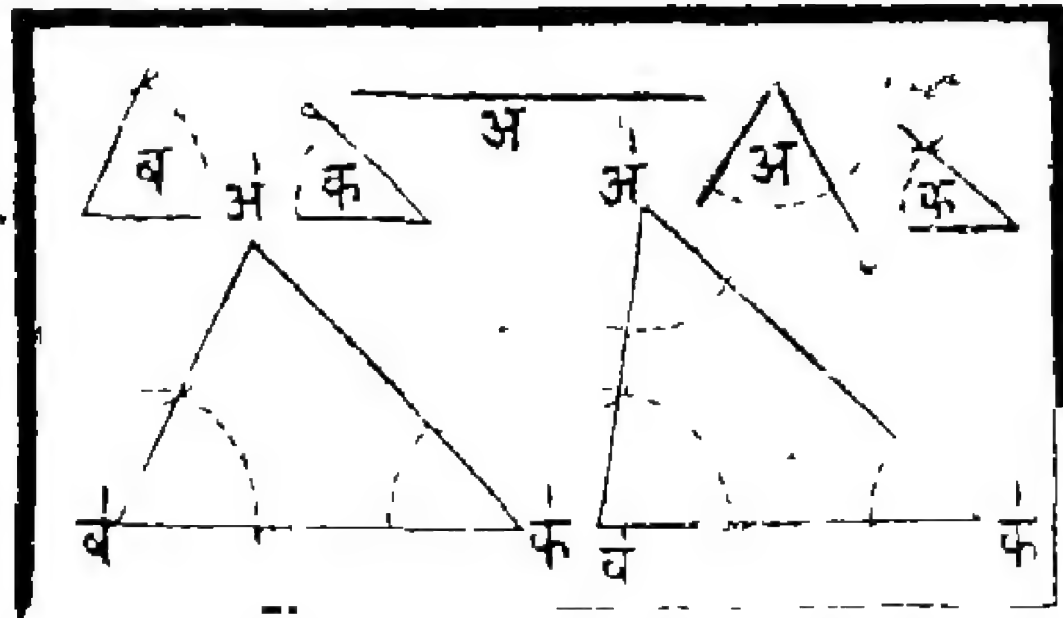
▮ ક એટલે વચક ખુણો,

તેમજ,

અ બાજુ એટલે \angle અની સામેની (= અક) બાજુ;
 બ બાજુ એટલે \angle બની સામેની (= અક) બાજુ;
 ક બાજુ એટલે \angle કની સામેની (= અબ) બાજુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાજુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દોરવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈ પણ બે ખુણા એક બાજુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાજુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાજુને અડકીને રહેલા બન્ને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાજુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાજુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧લો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ છે. \angle બ અને \angle ક, આ અ બાજુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨જો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ. \angle અ = અ બાજુની સામેનો ખુણો, અને \angle ક = અ બાજુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) રચના—અ લંબાઈની એક રેખા લીટી દોરો. બ છેડા આગળ વર્કસ એ \angle બ નેવડો, ખુણો કરો. ક છેડા આગળ વર્કસ એ \angle ક નેટરો ખુણો કરો.

અર્થક આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૨) રચના— \angle અ અને \angle કનો સરવાળો કરીને તે બે કાટખુણામાંથી બાદ કરો. બાદબાકી આવે તે ત્રિકોણનો બાકી રહેલો ત્રીજો ખુણો છે, એટલે કે જને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (બ) ખુણો છે. આ ખુણો જાણ્યા પછી પહેલા પ્રકારમાં કલા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકોણ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore \angle વક = અ,

$$\angle$$
 કવઅ = \angle વ,

$$\angle$$
 વકઅ = \angle ક;

$\therefore \triangle$ અવકની એક બાજુ અને બે ખુણા, આપેલી બાજુ અને બે ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.

અ બાજુ દોર્યા પછી અની અમુક બાજુએજ \angle વ દોરવો જોઈએ, અને અમુક બાજુએજ \angle ક કાઢવો જોઈએ એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દોર્યા હોય તોપણ તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ બને છે. આ વાત ત્રિકોણ એક પર એક મૂક્યા હોય તો ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણ સ્પષ્ટ થાય છે, કે બે ત્રિકોણના બધા ખુણા અને એકેક બાજુ સરખા હોય તો ત્રિકોણ એકરૂપજ હોય છે.

૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનો ખુણો આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજાથી જમણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ આપેલો છે તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૫. એક ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાંચા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ આપેલી છે, તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

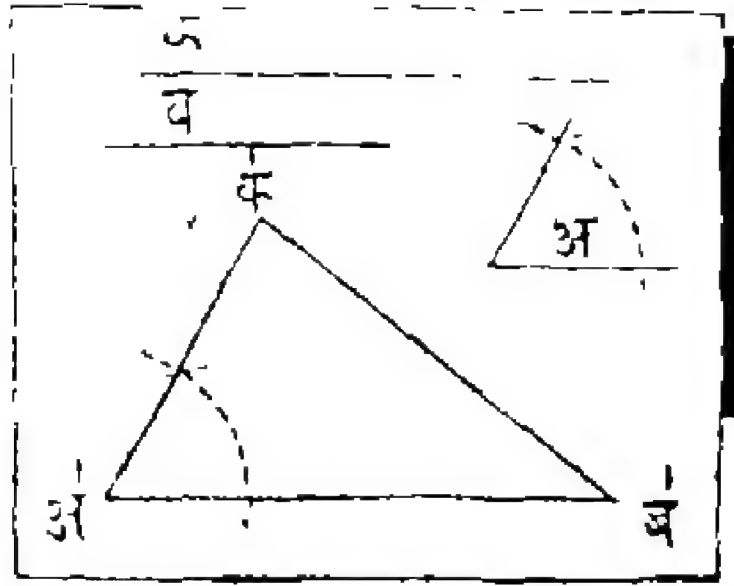
૭. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેનો ખુણો એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેનો ખુણો પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો $2.8''$ હોય એવો સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દારવો.



પક્ષ—ક અને બ એ આપેલી બાજુઓ છે. અ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા \angle અ જેવડો બિંદુ ખુણો કાઢો. બિંદુ ખુણાની બિંદુ અને બિંદુ એ બાજુઓ આપેલી ક અને બ બાજુની અંતર કરો.

બિંદુ આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

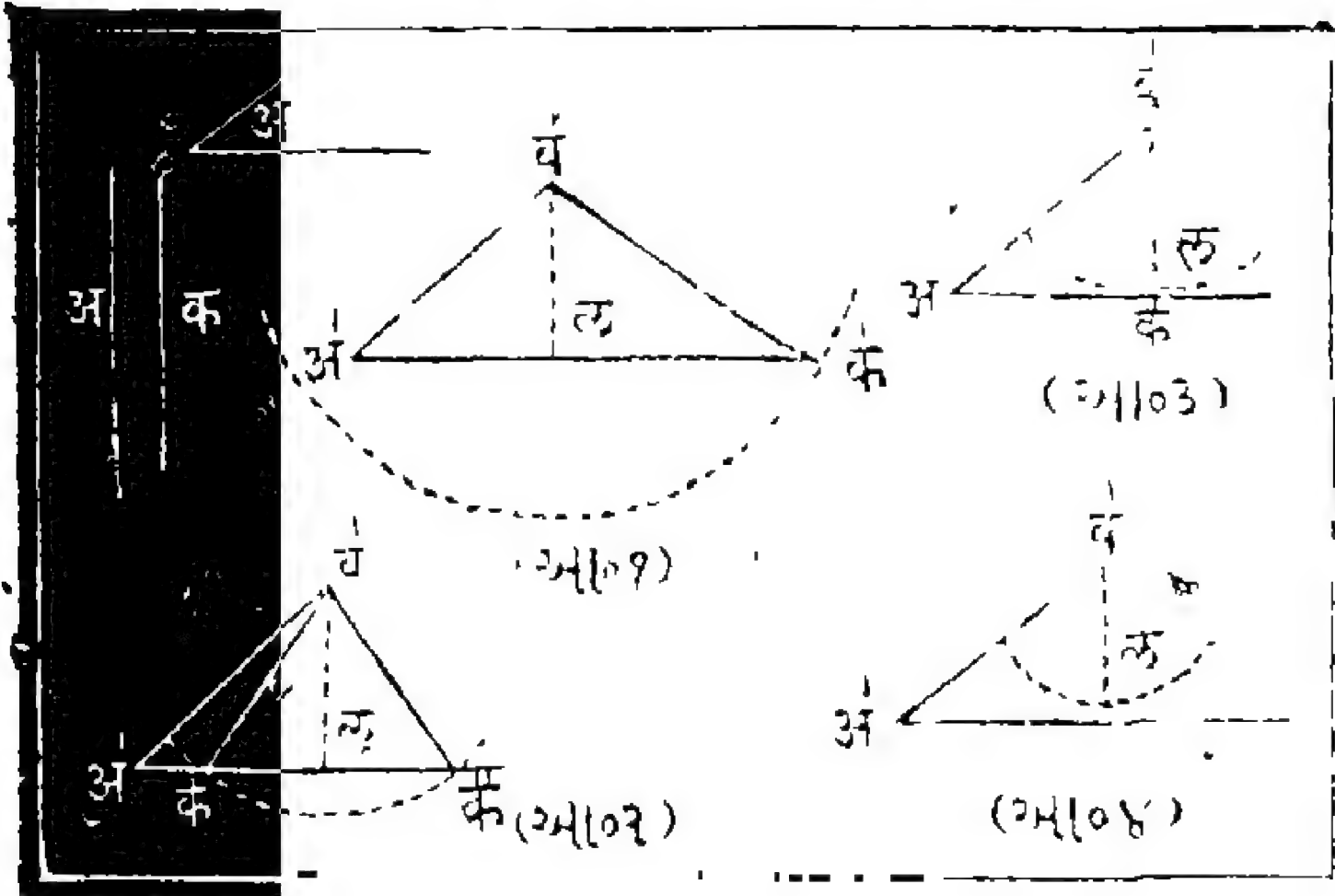
૨. જેનો એક ખુણો 60° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ $4''$ લાંબો હોય, એવો સમબાજી ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુ કેટલી લાંબી છે?

૩. જેની મધ્યમા $1.2''$ હોય એવો સમબાજી ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવતું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ થાય એટલા માટેજ દ્વિત આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેના ખુણા એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—અ અને ક આપેલી બાજુઓ છે, અને \angle અ આપેલો ખુણો છે.

રચના— \angle અ નેવડો બંધક ખુણો કરો. ક નેટલી લાંબી અંક બાજુ રાખો. અ મધ્યબિંદુ ધારીને અ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. (ધારો કે લ = અમાંથી અંક પર દોરેલો લંબ છે.)

અંક અને લ સાથે સરખાવતાં અ (=અંક)ની લંબાઈ ઓછી-વતી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) ક (=અંક) કરતાં અ (=અંક) વધારે લાંબી હોય, તો અ બિંદુ પરિમતી અંદર રહે છે, અને અંક એવો એક જ ત્રિકોણ બને છે. (બીજીસિદ્ધિ બુઓ.)

(૨) ચર્ક, ચર્મ કરતાં નાની, પણ લઘ કરતાં મોટી હોય, તેણે એક છેડે પરિધની બહાર રહેશે, અને પરિધ એક લીટીને જે અને જે એ છેડાએ હશે.

એવી રીતે ચર્ક અને ચર્મ એવા બે માપ્ય પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જગ્યા આવે છે, તેથી આ સંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

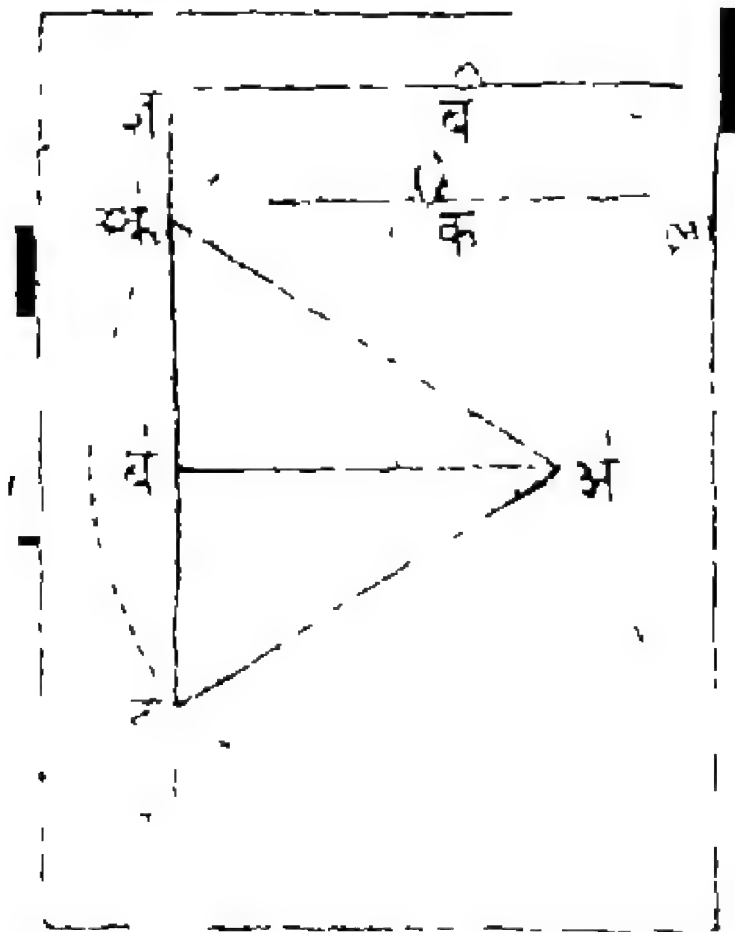
(૩) જો ચર્ક, લઘ અગ્રામર હોય, તો વર્તુળ એક લીટીને ફક્ત એકજ છેડાએ સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માપ્ય પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો ચર્ક, લઘી નાની હોય, તો વર્તુળ એક લીટીને બીજા-કુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીજાકુલ બની શકશેજ નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—ચ કર્ણ છે, ક બાજુ છે.

રચના—ક નેટથી એક બર્જ લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી ક્ષવજ્ઞ અમર્યાદ લીટી દોરો. અ મધ્યબિંદુ અને ચ ત્રિજ્યા લઈને ક્ષવજ્ઞ લીટીને ક અને હમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. અક અને અહ સાંધો.

અર્થક અને અર્થહ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(૨૫૯ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને કાટખુણના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮મી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

- (૧) \angle ચ = 30° , ચ = $2''$, ક = $4''$.
- (૨) \angle ચ = 134° , ક = $3''$, ચ = $6''$.
- (૩) \angle ચ = 44° , ક = $3''$, ચ = $6''$.
- (૪) અ = $4''$, \angle ચ = 29° , \angle ક = 64° .
- (૫) અ = $4''$, \angle અ = 29° , \angle ક = 14° .
- (૬) ચ = $3''$, \angle ક = 66° , \angle ચ = 66° .

૨. એક સમઢિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉચ્ચાઈ આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમઢિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેનો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમઢિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

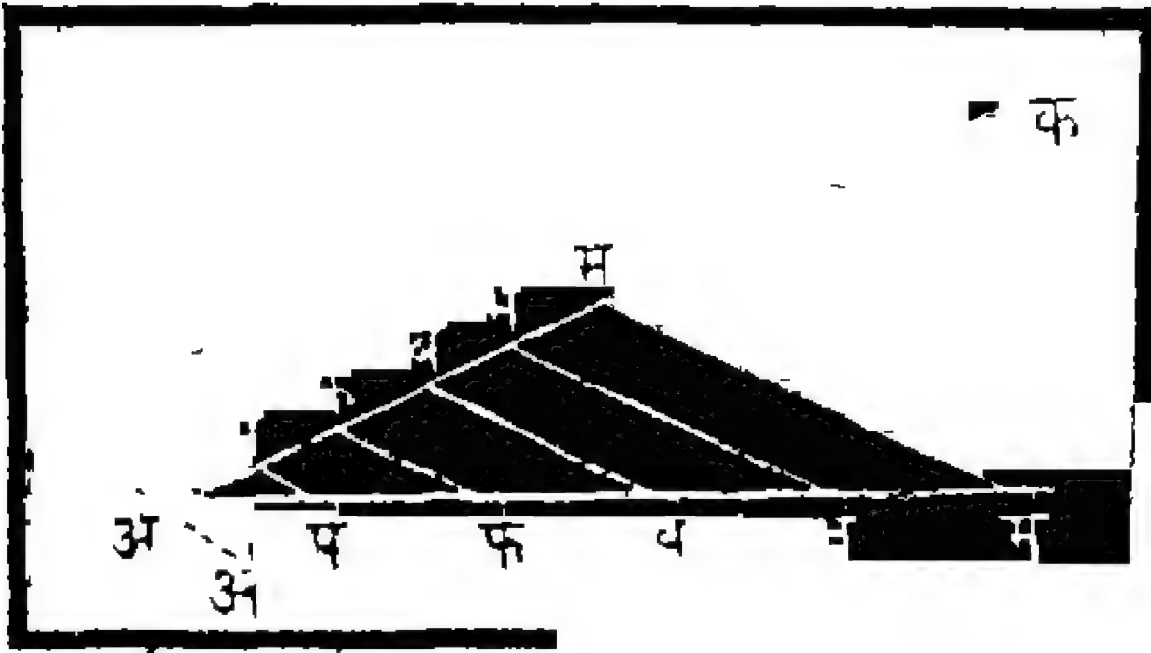
૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉચાઈનો અને એક બાજુનો સરવાળો તથા પાથો એ બે આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની દિશા અને ત્રણ બાજુ પૈકી દરેક બાજુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૭. ત્રિકોણનો પાથો, ઉચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—અમ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—અમની સાથે સાંકડો ખુણો કરતારી ગમે તે અંક અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેડા એક બીજીથી જરા આધા રાખીને અથી સર કરીને અક લીટીના અપ, પફ, ફવ, વમ, મમ, એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. અમ સાંધો, મ, વ, ફ, પ, બિંદુઓમાંથી મમને સમાંતર અને અમને છેલ્લારી મમ, વવ, ફફ, પપ લીટીઓ દોરો.

અપ, પફ, ફવ, વમ, મમ, આ માગેલા ભાગ છે.

અમાં લઈને પવને સમાંતર અવ દોરો.

સિદ્ધતા-∴ અમ્, પર્પ, ફર્ફ, વર્વ, મર્મ, મર્મ આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી અક્ષ લીટીના અપ, પર્પઆ ગાળાઓ સરખા છે.

∴ અમ્ લીટીના અર્પ, પર્ફ... આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.
૨. આપેલી લીટીનો ૩ ભાગ કાપી કાઢો.
૩. આપેલી લીટીનો ૩ ભાગ કાપી કાઢો.
૪. આપેલ અક્ષ લીટીના ક બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો, કે અક્ષ = ૩.

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં $\frac{\text{ફર્ફ}}{\text{પર્પ}}=૨$, અને $\frac{\text{મર્મ}}{\text{પર્પ}}=૪$ છે એમ સિદ્ધ કરો.

પરિશિષ્ટ અ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના અ, ઘ, ક, ઙ અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો અ અને ઘ મળાને ક અને ઙના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. અક્ષકઙ્ઙ એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં અક્ષ, અઙ સાંધો. ઘક્ષ, ઈઙને લંબાવીને ફમાં મળવા દો. ફક્ઙ અને અક્ઙ ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટ ખુણે છેલ્લી નથી.

૬. અવ, કઢ સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે ૫ એક ટિંદુ છે; તો \angle અવક = \angle અવપ + \angle કઢપ એમ બતાવી આપો.

૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાજુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંનો દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી ચકને હમાં મળે છે, અને ચકને હ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવક + \angle અકહ = ૨ \angle અહક એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની અવ, અક, બાજુઓ અનુક્રમે હ અને હમાં દુભાગેલી છે; અને ચહ, કઢ અનુક્રમે ૫ અને ૬ સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે હફ = ચહ, અને હગ = કઢ થાય છે; તો ૫અગ એક સીધી લીટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૦. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો, પાંચો વધારવાથી ચતા બહારના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. અવક ત્રિકોણના ચ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ હમાં મળે છે; તો \angle ચહક = $40^\circ + 1$ અ છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ચકની એકજ બાજુએ અવક એક સમબાજુ અને હવક એક સમદ્વિબાજુ એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને \angle ચહક = 1 \angle ચઅક છે; તો અહ = ચક છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. અવક ત્રિકોણની ચક, કઅ, અવ બાજુઓમાં ક્ષ, ચ, જ ટિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle ચઅક્ષ = \angle કચય = \angle અકજ; તો બતાવી આપો કે અક્ષ, ચય, કજ, આ એક ટિંદુમાં યઈને ન જતી હોય. તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને અવક ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. અવકહ કાટખુણુ ચતુષ્કોણની એક નાની (અવ) બાજુમાં એક ૫ ટિંદુ છે; તો એવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો, કે તેનું એક શિરોઠિંદુ ૫ થાય, અને બાકી રહેલાં શિરોઠિંદુઓ કાટખુણુ ચતુષ્કોણની બાકીની બાજુઓ ઉપર પડે

૧૫. અવક ત્રિકોણની વક બાજુ હ સુધી વધારી છે. કઈ, \angle અવકવને દુભાગે છે અને અવને ફમાં મળે છે. ફમાં થઈને વકને સમાંતર લીટી દોરી, તે વકને ફમાં અને અવકવને દુભાગનારી લીટીને ગમાં મળે છે; તો ફફ = ફગ છે એમ બતાવી આપો.

૧૬. અવક સમબાજુ ત્રિકોણની અવ,વક,કવ બાજુઓમાં અનુક્રમે પ,વ,ર, બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અવ = વવ = વર છે; તો \triangle વવર સમબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૧૭. એક વર્તુળના અઞ, વઞ, કઞ વ્યાસ છે; \triangle અવક $\equiv \triangle$ અવક છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૮. અવક ત્રિકોણની અવ, વક બાજુઓ પર ત્રિકોણની બહાર અવફગ, “વકઈઠ” ચોરસ દોરેલા છે; તો \triangle અવઠ $\equiv \triangle$ વકઠ એમ બતાવી આપો.

૧૯. અવક ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ પર ત્રિકોણની બહાર વકઠ, કઈ, અવક એ સમબાજુ ત્રિકોણ કાઢેલા છે; તો અઠ = વઈ = કક એમ બતાવી આપો.

૨૦. ક્ષયમાંના મ બિંદુથી ક્ષયની બંને બાજુએ મપ, મવ, આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle ચમપ = \angle ચમવ છે; તો \triangle પક્ષય $\equiv \triangle$ વક્ષય છે એમ બતાવી આપો.

૨૧. અવકઠ ચોરસ છે. તેની એકેક બાજુમાંથી અઈ, વફ, ફગ, ઠઠ આ સરખા કકડા કાપી કાઢેલા છે; તો ફફ,ગ,ઠ, આ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨૨. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ સરખી છે. અવક ત્રિકોણની બહાર અવ, અક પર અઠવ, અઈક સમબાજુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. વઈ, કઠ એક બીજીને મમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે, મઠ = મઈ.

૨૩. અવકઠઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. અ, વ ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મક, મઠ, મઈ અનુક્રમે ક,ઠઈ ખુણાને દુભાગે છે, અને મ બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ બતાવી આપો.

૨૪. અવક સમઘાળુ ત્રિકોણ છે. વકને વધારીને તેમાં બે િંદુ લીધું છે; તો તે બ કરતાં ળની વધારે પાસે છે એમ બતાવો.

૨૫. ક્ષયજ્ઞ કાટખુણુ ત્રિકોણમાં ક્ષય=ક્ષજ છે. \angle અને દુભાગનારી વર લીટી ક્ષજને રમાં મળે છે. હવે જો યજ્ઞ પર રજ લંબ દોર્યો હોય, તો રજ = ક્ષર છે એમ બતાવો.

૨૬. અવક લીટીમાંના બ િંદુમાંથી વહ,વઈ જે સરખા લીટીઓ એવી દોરી છે, કે વહવઈ કાટખુણુ થયો છે. અક પર વહ, વઈ લંબો દોરેલા છે; તો વહ = વઈ છે એમ બતાવો.

૨૭. જે સમદ્વિઘાળુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૨૮. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક ઘાળુઓ બરાબર છે. અવમાં વ િંદુ લો. કઅને વ સુધી વધારો, અને અવને અવ બરાબર કરો. હવે વવને વધારી હોય તો તે વકને કાટખુણુ છે એમ બતાવી આપો.

૨૯. જેનું મધ્યિંદુ મ છે એવા એક વર્તુળની અવ બ્યા ક સુધી વધારી છે; અને વક, અમની બરાબર કરી છે. કમ લીટી વર્તુળને વમાં છેદે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને વમાં છેદે છે; તો \angle અમવ, \angle વમવથી ત્રણગણો છે એમ બતાવી આપો.

૩૦. એક વર્તુળના અવ અને વહ ગમે તે જે બ્યાસ છે, બ િંદુમાંથી એક લીટી વહને સમાંતર દોરી છે. આ લીટી અવની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે વક, વહ લીટીઓથી દુભગાય છે એમ બતાવી આપો.

૩૧. * અવક ત્રિકોણના બ અને ક એ સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી ઘાળુઓને અનુક્રમે વ અને કમાં મળે છે; તો વવ, વકને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૨. અવકવ અતુકોણમાં અવ=વહ, અને \angle વ= \angle ક; તો વકને અવ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના અવકવ અતુકોણના કણ સરખા છે એ બતાવી આપો.

૩૪. અવકઠ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle વ$, અને $\angle ક = \angle ઢ$; તો અઠ = વક છે એ બતાવો.

૩૫. * અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક. વક પર દોરેલા લંબ અવ અને અક બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને ઢમાં અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે; તો $\triangle અઢફ$ સમદ્વિબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૩૬. પદ્મ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પદ્, પર સરખી બાજુઓમાં પથી સરખે અતરે ક્ષ અને ચ બિંદુઓ લીધાં છે. વ્ય, રક્ષ એક બીજીને જમાં છેદે છે; તો જ્ઞદ્મ, જ્ઞક્ષય સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૩૭. અવક ત્રિકોણની વક બાજુમાં (જરૂર લાગે તો વધારીને) ઢ બિંદુ એવું લીધું છે, કે વઅઢ અને અવઢ ખુણા સરખા થયા છે. અઢવ ખુણાને દુભાગનારી લીટી અકને (અથવા તેના વધારેલા ભાગને) ફમાં મળે છે; તો $\angle અવફ = \angle વઅફ$ છે એમ બતાવો.

૩૮. અવક સમબાજુ ત્રિકોણના વ અને ક ખુણા અનુક્રમે વઢ અને કઢથી દુભગાયા છે. અવને સમાંતર ઢફ દોરેલી છે, અને તે વકને ફમાં મળે છે. અકને સમાંતર ઢફ દોરેલી છે, અને તે વકને ફમાં મળે છે; તો વફ, ફફ, ફક સરખી છે એમ બતાવો.

૩૯. અવક સમદ્વિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. તેનો અવ કર્ણ છે. અઢ એ $\angle વઅક$ ને દુભાગનારી અને વકને ઢમાં મળનારી લીટી છે; તો અક+કઢ=અવ એ બતાવી આપો.

૪૦. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ બીજી બેમાંની નાની બાજુથી બમણો હોય છે.

૪૧. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ચતુષ્કોણની ચારે બાજુની ખરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો બીજાના તેને મળતા આવતા ખુણાની ખરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

૪૨. વક પાયાની બંને બાજુએ અવક અને ઢવક એકરૂપ ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક બીજીને મળતી આવતી બાજુઓ પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો વક, અઢને કાટખુણુ દુભગો છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. અવક અને હવક એ બે ત્રિકોણો વક પાયાની એકબ બાજુએ છે. જો અવ=હવ અને અક=હવ હોય, તો અહ, વકને સમાંતર છે એમ બતાવો.

૪૪. * કાટપુણ્ય ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ-ઓને સાંધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક છે. અવમાં ગમે ત્યાં ફ બિંદુ લઈને તેને વકના મધ્યબિંદુ હની સાથે સાંધું છે; તો અક અને અઈની બાદબાકી હઈ અને હવની બાદબાકી કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪૬. અવકહઈફ ષટ્કોણ છે; તો તેની પરિમિતિ અવઈ ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવો.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવો.

૪૮. અવક સમબાજુ ત્રિકોણમાં હ એક બિંદુ છે; તો હઅ, હવ, હક લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવો.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી હમેશ મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય છે એમ બતાવો.

૫૧. અવક ત્રિકોણમાં અ સૌથી મોટો ખુણો છે; તો એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ અવ, અક, અને હવક બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. અવક ત્રિકોણના અ અને ક સાંકડા ખુણા છે; અને \angle ક $>$ \angle અ છે. વકમાં વ એક બિંદુ છે; તો અવથી 'અવ નાની છે એમ બતાવો. અવથી અવ નાની હોવા માટે વ ક હોવું જોઈએ ?

૫૩. વર્તુળમાંના ક બિંદુમાં થઈને અવ વ્યાસ જાય છે, અને અકમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કમ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કમ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય આ બે ગમે તે લીટીઓ પરિધ સુધી દોરેલી હોય, અને જે \angle કમક્ષ \angle \angle કમય હોય, તે \angle કક્ષ \angle કય; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો અથ વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના ક બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કમ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કમ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય પરિધ સુધી દોરેલી છે, અને \angle કમક \angle \angle યમક છે; તો \angle કક્ષ \angle કય; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. અથક સમબાજુ ત્રિકોણમાં મ એક બિંદુ છે. જે \angle મઅથ \angle \angle મઅક હોય, તો \angle મકથ \angle \angle મથક છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કેટલી આકૃતિ થાય છે ?

૫૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અંદરના પુણ્યોને દુભાગનારી લીટીઓથી જે કાટપુણ્ય ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કણી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. અથકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અક કણીમાં પ અને ચ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ=કચ છે; તો અથકડ સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી આપો.

૫૯. અવની એકજ બાજુએ અવકઢ અને અવક્ષય આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરેલા છે; તો બતાવો કે કઢયક્ષ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો અક કર્ણુ ઈ સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે કઈ = કઅ થાય છે. ઈમાંથી કબને સમાંતર ઈફ દોરેલી છે, અને તે વધારેલી ઢક લીટીને ફમાં મળે છે; તો અવકક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૧. અવકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની અવ, વક, કઢ, ઢઅ બાજુઓમાં અનુક્રમે ઈ, ફ, ગ, હ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અહ = કફ અને અઈ = કગ; તો ઈફગહ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૨. * અવ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે. અ, વ, કથી અનુક્રમે અક્ષ, વય, કક્ષ લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો અ અને વ આપેલી લીટીની એકજ બાજુએ હોય, તો બતાવો કે અક્ષ + વય = ૨ કક્ષ છે.

૬૩. * ઉપલા પ્રશ્નમાં અ અને વ જો આપેલી લીટીની સામ-સામી દિશાએ હોય, તો અક્ષ - વય = ૨ કક્ષ છે એમ બતાવો.

૬૪. અવક ત્રિકોણમાં અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને વકને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને હ બિંદુમાં છેદે છે; અને હમાંથી અવ અને અક પર (જરૂર હોય તો એ બાજુઓને વધારીને) ઢક્ષ, ઢય લંબો દોરેલા છે; તો અક્ષ = અય અને વક્ષ = વય એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. અવક એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને અવમાં ઢ એક ગમે 'તે બિંદુ છે. અઢ પર કથી વિરૂદ્ધ બાજુએ અઢઈ સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો વઈ = કઢ છે એમ બતાવો.

૬૬. અવક ત્રિકોણમાં વમાંથી અકને મળનારી અને કમાંથી અવને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજને દુભાગી શકતી નથી એમ બતાવો.

૬૭. વક પાયા પર અવક અને ઢવક ત્રિકોણો છે; અને અહ \parallel વક છે. હવે અવક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ ઢવક ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછી છે એમ બતાવો.

૬૮. અવકઢ ચોરસ છે. અમાંથી વક અને કઢનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી, અને કમાંથી ઢઅ અને અવનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજી ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૯ અવક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પાયા સુધી અહ, અઈ લીટીઓ એવી દોરી છે, કે \angle વઅહ = \angle ક અને \angle કઅઈ = \angle વ થાય છે; તો અમાંથી વક પર દોરેલો લંબ ઢઈને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. અવક ત્રિકોણની અવ બાજુના ઢ મધ્યબિંદુમાંથી વકને સમાંતર ઢઈ દોરેલી છે, અને અવક ખુણાને ઢઈ દુભાગે છે; તો \angle અઈવ કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. અવક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો અ અર્ધો કાટખુણો છે. અને અ અને વમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા અહ અને ઢઈ લંબો કમાં મળે છે, તો ફઈ = ફક છે એમ બતાવો.

૭૨. અહ લીટી અવક ત્રિકોણના અ આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અહ પર દોરેલો લંબ અહને નમાં મળે છે. વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો મન = ફ (અવ+અક) છે એમ બતાવો.

૭૩. અવકઢ ચતુષ્કોણની અવ, ઢક બાજુઓની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય, એવા એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની અહ, કવની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪ અવક ત્રિકોણના બહારના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં પ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અવ+અક < પવ+પક.

૭૫. અવકઢઈફગઢ નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં અફ, ઢઈ, કઢ. ઢગ લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો.

૭૬. અહ લીટી અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અહ પર કાઢેલો લંબ અહને નમાં મળે છે, અને વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે મન = ફ (અવ-અક).

૭૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓમાં અનુક્રમે ડ, ફ બિંદુઓ લીધાં છે; અને વર્ફ, કઢ લીટીઓ ફમાં મળે છે; તે $હઅ+અઈ > ફફ+$ કઢ એમ બતાવે.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસપાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક. વકમાં ડ ગમે તે એક બિંદુ છે. વઢ, ઢકનાં મધ્યબિંદુઓથી વક પર દોરેલા લંબો વઅ, અકને અનુક્રમે હ અને ઘમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે હવ = અવ અને અહ = કવ છે.

૮૦. એક લીટીમાં અ, વ, ક, બિંદુઓ હારમંધ એવાં લીધાં છે કે અવ = ફ વક વ મધ્યબિંદુ ધારી ફઅવ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ કાઢ્યું છે. તેના પરિઘ પર પ એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને અ, પ બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને પવ = અપ કરી છે. હવે વવ, વક સાધો અને \angle વવક કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૮૧. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ડ અને અઢનું ફ મધ્ય-બિંદુ છે. વર્ફ વધારવાથી તે અકને ફમાં મળે છે; તો અફ = ફઅક છે એમ બતાવો.

૮૨. અવક એક ત્રિકોણ છે. વકનું ઢ મધ્યબિંદુ છે, અકમાં ફ બિંદુ એવું લીધું છે કે અફ = ફઅક થાય છે. અઢ, વફ એક બીજીને ફમાં છેદે છે; તો અઢનું ફ મધ્યબિંદુ છે, અને ફફ = ફવફ છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના કોઈ ત્રિકોણમાં આપેલા બિંદુમાં એક બિંદુને છેદે.

૮૪. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં પ બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તો પઅ + પવ + પક + પઢનો સરવાળો એકામાં એકો થશે?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં ચારે-બિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ?

૮૬. અવ પાપો અને અમાંથી પડતો વક ઉપરનો લંબ આપેલ છે; તો અવક સમઘનબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે ત્રિફલગીયોમાંથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા ત્રિફલગીયો એક લીટી દોરો.

૮૭ (અ). એક આપેલા ત્રિફલગીયો એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજાને છેદનારી બીજા બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ વચ્ચે એકની સામેનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ કયારે બને છે ?

૮૯. અથવા ત્રિકોણના અ શિરોત્રિફલગીયો ચક્રને સમાંતર ઢાંચે લીટી એવી દોરો કે $\text{ડાઈ} = \text{વડ} + \text{કાઈ}$ થાય.

૯૦. અથવા એક ત્રિકોણ છે, અને અમાંથી ચક્રને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે, તો અમાંથી ચક્રને પમાં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને દમાં મળે એવી એક લીટી એવી દોરો કે વપ લીટી પડના ફે બરાબર થાય.

૯૧. કાઢ લીટીની એકજ બાજુએ અ અને વ ત્રિફલગીયો છે. કાઢમાં એવું એક ત્રિફલગીયો શોધી કાઢો, કે (૧) તે ત્રિફલગીયો અ અને વનાં અંતરોની બાહ્યાકી ઓછામ ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. અથવા એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને ઢાંચે. કાઢ આ આપેલી લીટીઓ એક બીજાને છેદે છે; તો અથવા ત્રિકોણની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ ઢાંચે પર પડે અને એક શિરોત્રિફલગીયો કાઢ પર પડે એવો, ત્રિકોણ શી રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. અથવા ત્રિકોણના અ શિરોત્રિફલગીયો એવી એક લીટી દોરો કે તે પર વ અને કમાંથી દોરેલા લંબો ૧ : ૨ આ પ્રમાણમાં હોય.

• ૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણો આપ્યાં છે, તે ઉપરથી ચતુષ્કોણ દોરો.

૯૫. અ અને વ ત્રિફલગીયો કાઢ લીટીની (૧) સામસામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, કાઢમાં વ ત્રિફલગીયો શોધી કાઢો, કે $\angle \text{અવક} = \angle \text{વપક}$ થાય.

૯૬: પાયાની સામેનો ખુણો અને પાયાની પાસેનો એક ખુણો એ બેનો સરવાળો આપ્યો છે; તે આપેલા પાયા પર સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. અથવા ત્રિકોણની અથવા અને અથવા આ સરખી બાજુઓમાં ક્ષ અને ય બિંદુઓ એવાં લો, કે $વક્ષ = ક્ષય = ચક$ થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલી બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો તેનો ગાળો આપેલી લંબાઈનો થાય. એમ કરવું ક્યારે અશક્ય થાય છે ?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

(૧) $અ + બ$, $ક$, $\angle અ$.

(૨) $બ - ક$, $અ$, $\angle ક$.

(૩) $ક$, $\angle બ$ અને પરિમિતિ.

(૪) કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.

(૫) $બ + ક$ $અ$, $\angle અ$.

(૬) $બ - ક$, $અ$, $\angle અ$.

(૭) $અ$, $ક - બ$, $\angle ક - \angle બ$.

(૮) $અ$, $ક + બ$, $\angle ક + \angle બ$.

(૯) $અ$, $\angle અ$, $\angle બ - \angle ક$.

(૧૦) $અ = ૨''$, $\angle અ = ૪૦^\circ$, $\angle બ - \angle ક = ૨૦^\circ$.

(૧૧) $અ + બ = ૩''$, $ક = ૨.૬''$, $\angle ક = ૧૨૦^\circ$.

(૧૨) $અ = ૪''$, $ક - બ = ૧.૪૫''$, $\angle અ = ૬૦^\circ$.

(૧૩) $અ + બ = ૩.૭''$, $ક = ૦.૭૫''$, $\angle અ = ૬૨^\circ$.

(૧૪) પરિમિતિ = $૫''$, $\angle અ = ૪૨^\circ$, $\angle બ = ૩૬^\circ$.

(૧૫) $ક = ૨.૪''$, $બ - અ = ૧.૬''$, $\angle બ - \angle અ = ૬૫^\circ$.

(૧૬) $બ = ૧.૧''$, $ક + અ = ૩.૧''$, $\angle ક - \angle અ = ૬૦^\circ$.

પરિશિષ્ટ વ.

પ્રશ્નો છોડવાની પૃથક્કરણ પદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવજ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથમાં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવજ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એજ છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોડરાઓને ઉપયોગ કરતાં આવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોડરાઓમાં ઉત્પન્ન કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય છે, કે પ્રશ્નનો ઉત્તર આવડવો એ એક નસીબની વાત છે. પરંતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં કોઈકમદ ઉતરવા માટે સ્વાભાવિક બુદ્ધિ એક આવશ્યક બાબત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહિતી અને મહાવરો એ આવતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોડરાઓને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટેવ પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે બીજી કોઈ પણ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હંમેશની જે પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ બાબત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ ખોળતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જેતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ બાબત અ સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન શું આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને શું મેળવવા માટે શું પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે, એટલે આ કારણોની

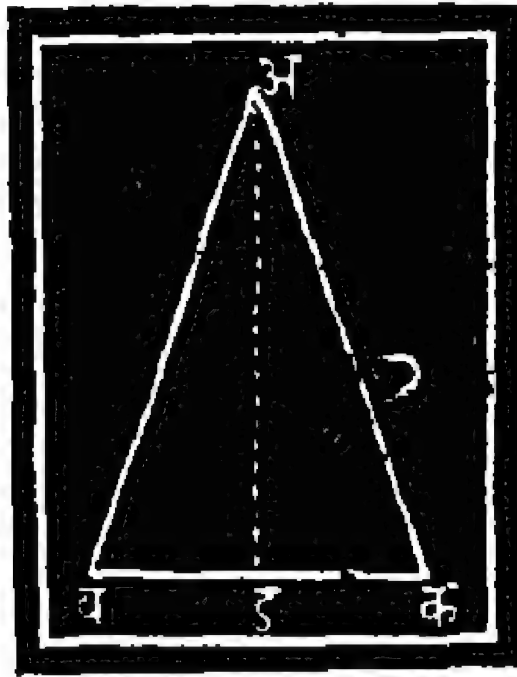
પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં કનું સાધન હ છે, અને હનું જ સાધન છે, અને જ આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે જ આપણને અનુકૂળ છે, માટે જ પરથી હ, અને હ પરથી ક અનુકૂળ કરી લેવું; અને ક અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી જ અને જ પરથી જ સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે, એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા બલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી જ અધિકારીના હાથમાં છે, તે અધિકારી પાસે જવું વજન છે, જ, કનો સ્નેહી છે, પણ કની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે કના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઓળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં કના સ્નેહીઓમાં આપણો ઓળખીતો માણસ જડ્યો, એટલે તેની મારફતે કને મળી, કની મદદથી જને અને જની મદદથી જને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (છટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી બીજી બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે કે કોઈ પણ છટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવે એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતા જઈએ છીએ, અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાત્કાલામાંનું અથવા આપણું જાણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે છટ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકારવો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કલ્પના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કંઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાત્કાલામાંની અથવા આપણી જાણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે છટવસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ(નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જડ્યો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન હોડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે.

જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનબૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતાં, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉદ્ધટો કમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે સરખા ભાગ કરે છે.



અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી અડ છે. તે હ બિંદુમાં વકના બે સરખા ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

વક, વકની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ? બે લીટીઓ અરસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણમાંના બે

સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ.....વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર નહતો નથી. બીજી કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી કરવા માટે, એટલે \triangle અડધ અને \triangle અડક એકરૂપ કરવા માટે, કઈ બાજુઓ ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ કરવા માટે બંનેની ત્રણે બાજુઓ અરસપરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બધી બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખાં હોવાં જોઈએ, અથવા..... વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી; પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે અડ અડ બાજુઓ અને \angle અડ અડ અનુક્રમે અડ, અડ બાજુઓ અને \angle અડકની બરાબર છે.

અડ અને અડક એક બીજીને બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જેતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆની પાછળ પાછળ જઈએ. તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∴ અડ અને અડક ત્રિકોણોમાં—

અડ = અડ,

અડ બંનેનાં સાધારણ;

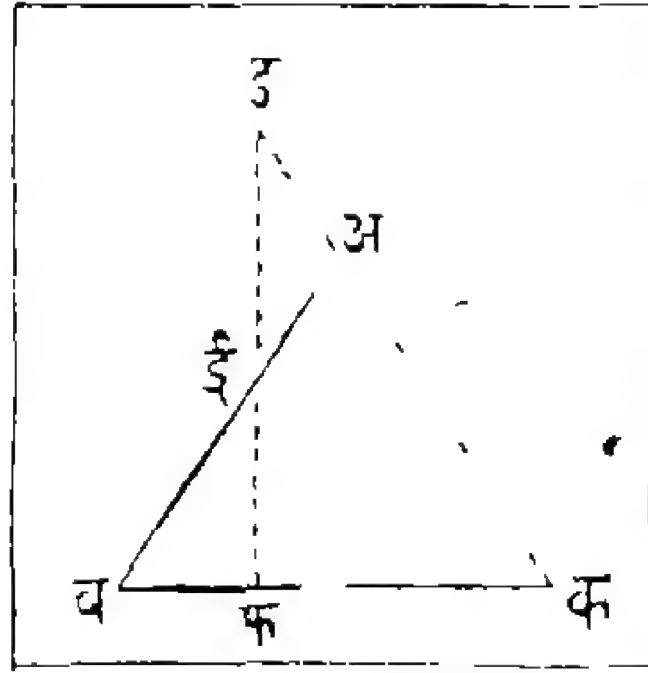
\angle અડ = \angle અડક.

∴ \triangle અડ \equiv \triangle અડક.

∴ અડ = અડક.

ઉદાહરણ ૨.

અડક સમદ્રિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની અડ બાજુ ડ સુધી વધારી છે; અડમાંથી અડ જેટલો અડ લાગ કાપી કાઢ્યો છે; વક્રને ફ ધિદ્માં મળતાં સુધી ડઈને વધારી છે; તો \angle અડક એક કાઢખુણું છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

\angle ડફક કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

$$\angle \text{ડફક} = \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ} \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડફક} = \angle \text{ફવર્ડ} + \angle \text{વર્ડફ}; \quad (\text{પ્ર. ૮, ઉ. ૩})$$

$$\therefore \angle \text{ફડક} + \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવર્ડ} + \angle \text{વર્ડફ} (= \angle \text{અઈડ}).$$

$$\text{પણ } \angle \text{ડકફ} = \angle \text{ફવર્ડ},$$

\therefore ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો—

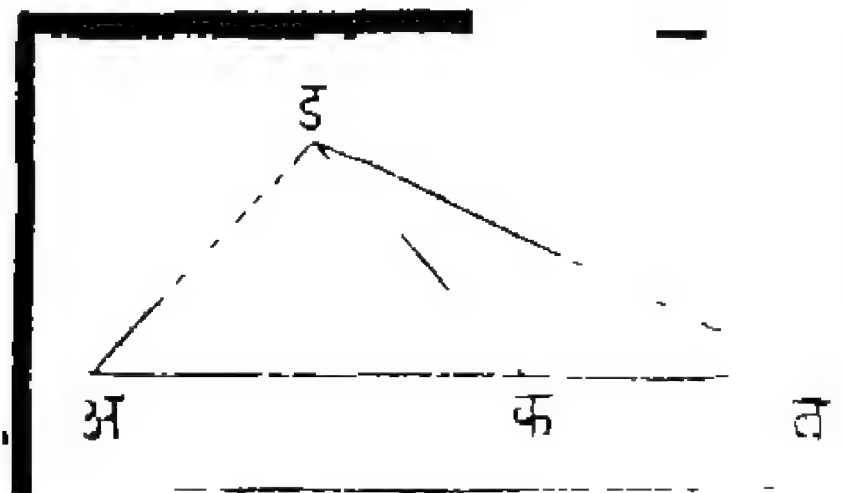
$$\text{શેષ } \angle \text{ફડક} = \text{શેષ } \angle \text{અઈડ}.$$

હવે $\angle \text{ફડક} = \angle \text{અઈડ}$ એ પક્ષ છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી $\angle \text{ડફક}$ કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

એકીકરણ (સ્પષ્ટ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તેમાંના એક પરનો ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પૃથક્કરણ.

અવ આપેલી ઢીઠી છે. ધારો કે તેના ક બિંદુમાં માઝા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $\angle કક^2 = 2$ $\angle વક^2$ હોય, તો અક જોનો કર્ણ હોય એવા સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણની એક બાજુના વર્ગની બરાબર વકનો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો અકહ ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે $\angle અકહ, \angle કઅહ$, દરેક 45° નો કરો.

$$\therefore કહ^2 = કવ^2,$$

$$\therefore કહ = કવ.$$

$$\therefore \angle વહક = \angle કવહ.$$

$$\therefore અહ = કહ,$$

$$\therefore \angle હઅક = \angle હકઅ = \frac{1}{2} \text{ કાટખુણો.}$$

$$(\text{કારણ કે } \angle અહક = 90^\circ \text{ કાટખુણો.}) \quad (\text{રચના})$$

$$\therefore \angle હકવ બહારનો ખુણો = 90^\circ \text{ કાટખુણો.} \quad (\text{પ્ર. ૧})$$

$$\therefore \angle કહવ + \angle કવહ = 90^\circ \text{ કાટખુણો.} \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\therefore \angle કવહ = 45^\circ \text{ કાટખુણો, અને } \angle કહવ = 45^\circ \text{ કાટખુણો.}$$

હવે અવહ ત્રિકોણના $\angle વઅહ$ અને $\angle અવહ$ આપણે જાણીએ છીએ, અને હકવ ત્રિકોણના પણ બધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણો કાઢી શકાશે; અર્થાત્ ક બિંદુનું સ્થળ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

$$\angle વઅહ \frac{1}{2} \text{ કાટખુણો બરાબર કરો.}$$

$$\angle અવહ \frac{1}{2} \text{ કાટખુણો બરાબર કરો.}$$

$$\angle વહક \frac{1}{2} \text{ કાટખુણો બરાબર કરો.}$$

ક બિંદુ છે.

ક્રમવિરૂદ્ધ સિદ્ધતા.

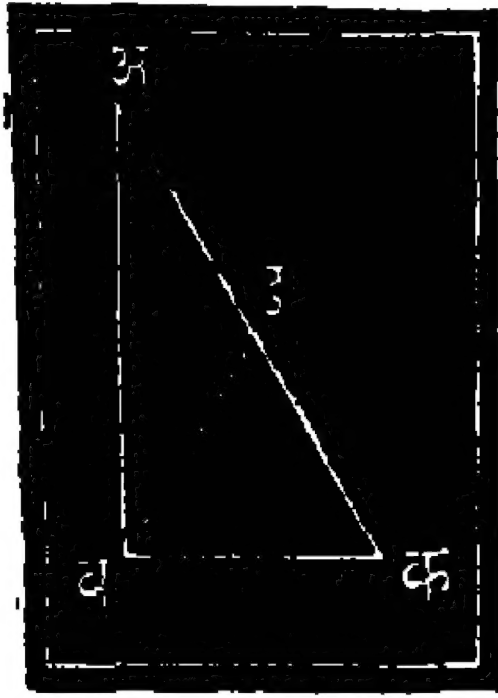
કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે ક્યાં કારણો અનુક્રમ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કંઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષની વિરૂદ્ધ બાબતો

હત્તન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી ફરક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપવી વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે બે વિકલ્પ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડભરેલો હોય, છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી કર્ણના અધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવક કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. D, અકનું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—BD = AD = DC.

સિદ્ધતા—કહ અથવા અડની બરાબર BD ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી. તે નાની હોય તો—

$\angle B A D < \angle A B D$ થાય,

અને $\angle B A D < \angle A C D$ થાય,

એટલે $(\angle B A D + \angle B A D) < \angle A B C$ થાય,

અને મોટી હોય તો—

• $(\angle A B C + \angle A C B) > \angle A D C$ થાય;

પણ એમાંની એક પણ બાબત શક્ય નથી;

કારણ કે $\angle A B C = 90^\circ$ કાટખુણો છે; અર્થાત્ $\angle B A D + \angle A C D = \angle A B C$ છે.

માટે BD, અડથી નાની પણ નથી, અને મોટી પણ નથી; એટલે બંને સમ્પન્ન છે.

ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગના છે. વિદ્યાર્થીએ માપણી કરીને આપવાના ઉત્તરોમાં ફેર ઇંચ નોટલી અથવા એકાદ અંશ નોટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.

પૃષ્ઠ ૧૩-૧૫.

- પ્ર. ૧. ૧.૬"; ૪૦ મિ. મી,
 પ્ર. ૪. પહેલી લીટી = ૪૦ મિ. મી; ૧.૬"
 બીજી લીટી = ૪૯ મિ. મી; ૧.૬૫"
 પ્ર. ૫. અક = ૦.૮"; કવ = ૦.૪"; અવ = ૧.૨".
 પ્ર. ૬. અક = ૦.૬"; કવ = ૦.૪"; અવ = ૧.૩".
 પ્ર. ૭. અવ = ૧.૭૫"; અક = ૦.૮૫"; કવ = ૦.૯".

પૃષ્ઠ ૧૮-૨૦.

- પ્ર. ૨. પહેલું વૃક્ષ = ૩'. ૨"; બીજું વૃક્ષ = ૨' ૧૩"; ત્રીજું વૃક્ષ = ૨', ૭".
 પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.
 પ્ર. ૧૧. ૧૦' પ્ર. ૧૨. ૪૧' પ્ર. ૧૩. ૩૭.૨'.
 પ્ર. ૧૪. ૯.૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૫. ૭.૨ માઇલ.
 પ્ર. ૧૬. ૧૩.૩૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૭. ૩.૭૫ માઇલ.
 પ્ર. ૧૮. ૨૮૨.૮'

પૃષ્ઠ ૪૨-૪૪.

- પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦°; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦°.
 પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણો.
 પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬°.
 પ્ર. ૪. ૫.૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧°.
 પ્ર. ૫. ૬૩ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫°.
 પ્ર. ૬. ૨૮.૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯°.
 પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬°; ૩.૨૫ માઇલ.
 પ્ર. ૮. ૪.૦૬૨૫ માઇલ.
 પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
 પ્ર. ૧૦. ૬ સેં. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭૬ હાથ.

[સમાપ્ત.]

